1. (a.s. 1998-1999, Scientifico-tecnologico "Brocca") Si vuole determinare il rapporto e/m, tra carica e massa dell'elettrone, utilizzando un tubo contenente neon a bassa pressione al ui interno gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico.

Essi hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tra due elettrodi da una differenza di potenziale $\Delta V = 0.78\,kV$ fino a raggiungere la velocità v. Gli atomi di neon ne rendono visibile la traiettoria interagendo al loro passaggio.

Una volta raggiunta la velocità v, gli elettroni entrano in una zona che è sede di un campo magnetico con $B = 4.3 \cdot 10^{-4}\,T$ e con un angolo α tra i vettori B e v. Il candidato:

1. spieghi in cosa consiste leffetto termoelettronico;
2. spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria degli elettroni;
3. disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone tra i due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per $\alpha = 90°$ e per $\alpha < 90°$;
4. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo formato tra i vettori B e v è $\alpha = 60°$;
5. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il rapporto e/m in funzione dei valori misurabili ΔV, B e r.

Esempio di soluzione:

....

2. Un pennello di luce monocromatica emessa da un laser illumina una doppia fenditura praticata su uno schermo A. La distanza tra le due fenditure sia $0.1\,mm$. Al di là della doppia fenditura, a una distanza di $2\,m$ da A è disposto, parallelamente ad A, uno schermo B su cui si osserva l'interferenza della luce difratta dalle due fenditure. Calcolare la lunghezza d'onda della luce emessa dal laser se la distanza su B della frangia centrale luminosa dalla prima frangia laterale luminosa è di $10\,mm$.

Se il laser illumina un fotocatodo di cesio (frequenza di soglia per effetto fotoelettrico $\nu_0 = 4.34 \cdot 10^{14}\,Hz$), si ha emissione di elettroni?

Esempio di soluzione:

Ci troviamo nella situazione in cui un'onda piana illumina perpendicolarmente lo schermo sul quale sono praticate le due fenditure. Supponiamo che le due fenditure siano parallele e molto strette rispetto alla loro distanza reciproca d. Le due fenditure si comportano come due sorgenti coerenti, in fase tra loro, che illuminano, per diffrazione, una zona sufficientemente ampia dello schermo B. In questa zona si osserva la sovrapposizione (e quindi l'interferenza) della luce proveniente dalle due fenditure. La distanza L tra lo schermo A e lo schermo B è molto maggiore della distanza tra le due fenditure e anche molto maggiore della distanza tra l'ordine 0 e il primo ordine di inteferenza. Il punto in cui è localizzata la frangia di ordine 0 si trova dove non c'è differenza di percorso per i due raggi provenienti dalle due fenditure.

I due punti in cui sono localizzati i primi ordini di interferenza si trovano quando la differenza di percorso tra i raggi provenienti dalle due fenditure è pari alla lunghezza d'onda della radiazione.
Poiché i raggi provenienti dalle due fenditure e convergenti sullo schermo B sono con ottima approssimazione paralleli vale la relazione:

$$d \sin \alpha = \lambda$$

dove α indica la distanza angolare tra la frangia di ordine 0 e la frangia del prim'ordine. Inoltre è:

$$\sin \alpha \simeq \frac{\delta}{L}$$

dove δ è la distanza lineare tra la frangia di ordine 0 e quella del prim'ordine misurata sullo schermo B.
Quindi, con ottima approssimazione perché $\delta << L$, possiamo scrivere:

$$d \frac{\delta}{L} \simeq \lambda$$

e si ottiene $\lambda = 0.5\,\mu m$.

La corrispondente frequenza è $\nu = c/\lambda \simeq 6 \cdot 10^{14}\,Hz$. Poiché nel nostro caso $\nu > \nu_0$ si potrà osservare emissione di elettroni per effetto fotoelettrico; l'energia cinetica massima dei *fotoelettroni* sarà $E_max = h\nu - h\nu_0$.

3. Le armature parallele di un condensatore piano sono poste, in aria, a distanza d e sono caricate a una differenza di potenziale ΔV.
Un elettrone entra nella zona tra le due armature, attraverso un foro posto al centro dell'armatura carica positivamente, con velocità v_0 perpendicolare all'armatura stessa.
Quale valore deve avere v_0 affinché la velocità dell'elettrone si annulli a metà distanza tra le due armature?

Esempio di soluzione:

Se v_0 è la velocità iniziale dell'elettrone allora, nel caso non relativistico, la sua energia cinetica sarà $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$.
All'esterno delle due armature il campo elettrico è nullo e l'elettrone si muove di moto rettilineo e uniforme.
Nell'ipotesi in cui la distanza d tra le due armature sia piccola rispetto alle dimensioni lineari delle armature stesse e nella ipotesi in cui il diametro del foro sia piccolo rispetto a d possiamo assumere che il campo elettrico sia costante tra le due armature e, quindi, che il potenziale cresca linearmente passando dalla prima alla seconda armatura.
L'elettrone si ferma quando tutta la sua energia cinetica si è trasformata in energia potenziale:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = e \frac{\Delta V}{2}$$

perché $V/2$ sarà il potenziale nel punto equidistante tra le due armature. Quindi possiamo calcolare v_0 che, evidentemente, non dipende dal valore della distanza

d tra le due armature:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e\Delta V}{m}} \simeq 5.9 \cdot 10^6 \, m/s$$

e ora, a posteriori, possiamo verificare che non è una velocità relativistica ($\beta = 0.02$ e quindi $\gamma = 1.0004$).

4. Un elettrone si muove nel vuoto con velocità pari a $0.6c$, essendo c la velocità della luce.

Perpendicolarmente alla direzione di moto della particella opera un campo magnetico $B = 0.6\,T$. Si ricorda che la massa a riposo dell'elettrone è $9.11 \cdot 10^{-31}\,kg$ e la sua carica di $1.6 \cdot 10^{-19}\,C$.

Si chiede di valutare:

- il raggio di curvatura della traiettoria descritta dall'elettrone;
- come varia il raggio al crescere della velocità della particella; calcolare, per esempio, quale valore esso assume per $v = 0.9c$;
- quale sia in questo secondo caso l'errore percentuale che si commette quando non venga fatta la correzione relativistica della massa dell'elettrone.

Esempio di soluzione:

L'elettrone in moto nel campo magnetico risente della *forza di Lorentz* che in assenza di campo elettrico è:

$$\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

dove e rappresenta la carica dell'elettrone. Poiché $\vec{v}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari la forza di Lorentz risulta essere una forza centripeta e il moto circolare uniforme con velocità tangenziale $\vec{v}$.
In un moto circolare uniforme la forza centripeta è in modulo:

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

dove r rappresenta il raggio di curvatura della traiettoria e m la massa della particella; quindi nel nostro caso possiamo scrivere:

$$m\frac{v^2}{r} = evB$$

Semplificando e esplicitando r si ottiene:

$$r = \frac{mv}{eB}$$

Dobbiamo ora tenere conto che la massa di una particella in moto è in generale funzione della velocità: $m = \gamma m_0$ se indichiamo con m_0 la massa a riposo della particella.
E' noto che la carica elettrica e è invece una *propriet'a* invariante anche per particelle in moto a velocità relativistiche.

Un calcolo classico del raggio di curvatura porterebbe al risultato:

$$r_{cl} = \frac{m_0 v}{eB}$$

con un errore relativo (rispetto al risultato relativisticamente corretto):

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{r - r_{cl}}{r} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

Il raggio di curvatura sarebbe direttamente proporzionale alla velocità della particella.

Nel caso in cui $v = 0.6c$ si ha $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \simeq 1.25$:

$$r = 1.25 \frac{9.11 10^{-31} 0.63 10^8}{1.6 10^{-19} 0.6} \simeq 2.1 mm$$

e l'errore relativo sul raggio con un calcolo classico sarebbe:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1.25 - 1}{1.25} = 20\%$$

Nel caso in cui $v = 0.9c$ si ha $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \simeq 2.3$ e

$$r = 2.3 \frac{9.11 10^{-31} 0.93 10^8}{1.6 10^{-19} 0.6} \simeq 5.9 mm$$

e l'errore relativo sul raggio con un calcolo classico sarebbe:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{2.3 - 1}{2.3} \simeq 56\%$$

L'andamento del raggio di curvatura in funzione della velocità è monotono crescente anche nel caso relativistico ma in questo caso presenta un asintoto verticale per $v \to c$.

Le condizioni per avere orbita circolare richiedono assenza di fenomeni di dissipazione: quindi l'elettrone deve muoversi liberamente (per esempio senza urtare con atomi di gas residuo) e deve potersi trascurare l'energia irraggiata a causa del moto accelerato.

[$d = 4.0\,cm$; $\Delta V = 200\,V$; $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$; $h = 6.63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$; $c \simeq 3 \cdot 10^8\,m/s$]