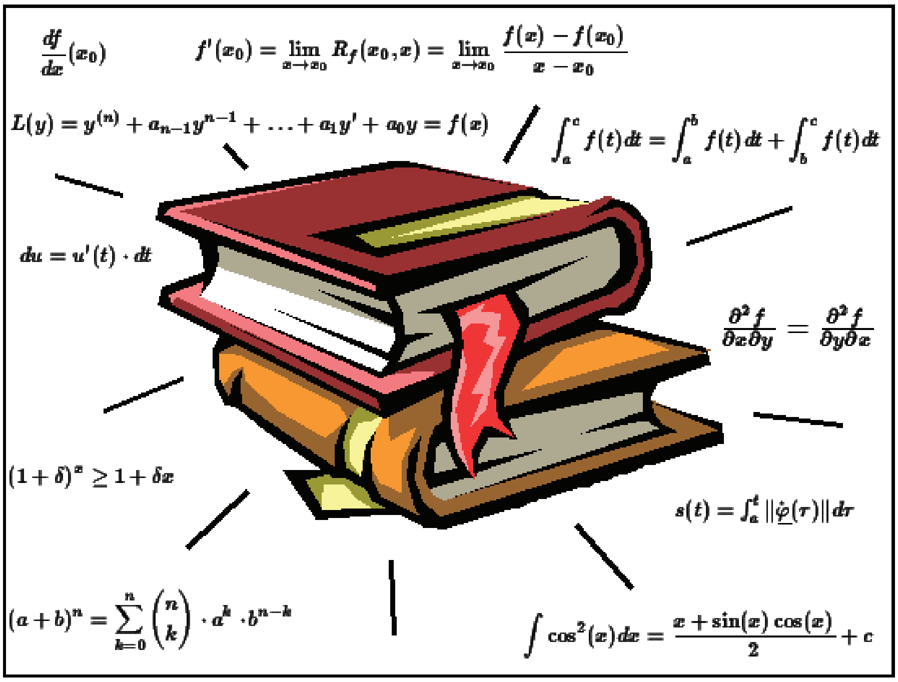
Prontuario di Analisi Matematica

(per Ingegneria)



(Praticò Andrea)

Indice

Versione in Visione Gratuita

Versione in Visione Gratuita

Versione in Visione Gratuita

Parte I

Analisi Matematica I

Versione in Visione Gratuita

Primitive di Funzioni Elementari	
Funzione	*Primitiva*
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot x + K(K = costante)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
$a^x \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$
$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$
$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$
$g(x) \cdot h(x)$	$G(x)h(x) - \int_x (G(t) \cdot h'(t))dt$ (*Integrazione per Parti*)
$f(g(x)) \cdot g'(x)$	$\int^{g(x)} f$ (*Integrazione per Sostituzione*)
$g(x) \cdot g'(x)$	$\frac{1}{2}g^2(x)$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$ln\|g(x)\|$

Tabella 1.2: Primitive di Funzioni Elementari

Versione in Visione Gratuita

(Composizione di Funzioni Inverse)

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) \Rightarrow (g(f(x)))^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x)) \tag{2.6}$$

(Binomio di Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \tag{2.7}$$

(Binomiale n su k)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a \cdot k^{\alpha} + b) = a\left(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\right) + n \cdot b \tag{2.11}$$

$$n!(n+1) = (n+1)! \tag{2.12}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{2.13}$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \tag{2.14}$$

$$\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a(b) - \log_a(c) \tag{2.15}$$

$$\log_a(b)^c = c \cdot (\log_a b) \tag{2.16}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \tag{2.17}$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \tag{2.18}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{2.19}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{2.20}$$

Versione in Visione Gratuita

(Disuguaglianza Triangolare)

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{2.38}$$

$$|x+y| \geq ||x| - |y|| \tag{2.39}$$

$$(2n)! = n! \cdot \prod_{i=1}^{n} (n+i) \tag{2.40}$$

$$k^k n^{nk} \leq (n!)^{k+1} \quad \forall n \geq m \in \mathbb{N} \tag{2.41}$$

Versione in Visione Gratuita

3.3 Formule di Prostaferesi

$$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha \pm \beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha \mp \beta}{2}) \tag{3.7}$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha - \beta}{2}) \tag{3.8}$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha - \beta}{2}) \tag{3.9}$$

$$\tan(\alpha) \pm \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \tag{3.10}$$

3.4 Formule di Werner

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \tag{3.11}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \tag{3.12}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \tag{3.13}$$

3.5 Formule Varie

$$\sin(x) = \frac{2\tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \qquad \sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) \tag{3.14}$$

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \qquad 1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2) \tag{3.15}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} \tag{3.16}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \tag{3.17}$$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \tag{3.18}$$

$$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \varphi) \tag{3.19}$$

con $\tan(\varphi) = \frac{B}{A} \quad C = \frac{A}{\cos(\varphi)} = \frac{B}{\sin(\varphi)} = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = D\sin(\omega t + \psi) \tag{3.20}$$

con $\tan(\psi) = -\frac{A}{B} \quad D = \frac{B}{\cos(\psi)} = -\frac{A}{\sin(\psi)} = \sqrt{A^2 + B^2}$

Versione in Visione Gratuita

Capitolo 4

Geometria Elementare

Qui di seguito, vengono riportate alcune
equazioni di luoghi geometrici bidimensionali
di uso frequente:

4.1 Circonferenza

C=Centro della circonferenza; r=Raggio Equazione:$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$C=(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

4.2 Ellisse

a,b=Semiassi; e=Eccentricità

$$\text{Equazione: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

4.3 Iperbole

$$\text{Equazione: } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$A=(a,0),\, A'=(-a,0) \text{ (Vertici dell'iperbole)} \qquad y=\pm\frac{b}{a}x \text{ (Asintoti)}$$

Versione in Visione Gratuita

Teorema 4 (Criterio della Radice) *Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi ($a_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$). Supponiamo che esista il*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}$$

Si hanno i seguenti casi:

- *Se $L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*
- *Se $L > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*
- *Se $L = 1$, non si può affermare nulla.*

Teorema 5 (Criterio del Rapporto) *Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi ($a_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$). Supponiamo che esista il*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$$

Si hanno i seguenti casi:

- *Se $L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*
- *Se $L > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*
- *Se $L = 1$, non si può affermare nulla.*

Versione in Visione Gratuita

Teorema 6 (di Leibniz) *Sia a_n una successione a termini positivi ($a_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$), tale che $a_n \geq a_{n+1}$ (successione decrescente); sia inoltre*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

Teorema 7 (Convergenza Assoluta) *Se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

converge, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge.

Capitolo 6

Limiti

In questo capitolo, verranno trattati i limiti notevoli, ed alcuni teoremi relativi al calcolo dei limiti.

6.1 Limiti Notevoli

6.1.1 Limiti di Successioni

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{2n}{n} = +\infty \tag{6.1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{a_n})^{b_n} = e^{(\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n})} \tag{6.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{n-a}{n+a})^n = \frac{1}{e^{2a}} \tag{6.3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{6.4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2} \tag{6.5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n\cdot\ln(n)} = 1 \tag{6.6}$$

(Definizione del Numero di Nepero "e")

$$e = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n \tag{6.7}$$

Versione in Visione Gratuita

6.2 Definizioni

Definizione 1 (Limite di una Funzione Reale) *Data una funzione reale $f(x) : D \to \mathbb{R}$ (con D=dominio di f), si definisce: limite di f(x) per x che tende ad x_0 (con x_0 punto di accumulazione* [1] *per D) il valore $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che, $\forall J(l), \exists I(x_0) : f(I \setminus \{x_0\}) \subseteq J$ cioè: "**per ogni intorno J di l, esiste un intorno I di x con zero, tale che l'immagine, tramite f, di I escluso x con zero, sia contenuto in J**.*

Definizione 2 (Massimo e minimo Limite) *Sia $f(x)$ una funzione reale definita in $D \setminus \{x_0\}$. Per ogni intorno $V(x_0)$, si ponga*

$$m(V) = \inf_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x),$$

$$M(V) = \sup_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x).$$

Data la Sfera di centro x_0 e raggio r $S(x_0, r)$, si ha:

$$l = \lim_{r \to 0} m\Big(S(x_0, r)\Big) = \min \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \textit{(minimo Limite)} \tag{6.17}$$

$$L = \lim_{r \to 0} M\Big(S(x_0, r)\Big) = \max \lim_{x \to x_0} f(x), \quad \textit{(Massimo Limite)} \tag{6.18}$$

Da notare che questi limiti esistono sempre, in quanto esiste sempre l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(x)$, potendo anche essere:

$$\inf_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x) = -\infty$$

$$\sup_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x) = +\infty$$

Definizione 3 (Forme indeterminate) *Sono quelle forme, per cui non è possibile applicare direttamente i teoremi sulle operazioni con i limiti; esse sono:*

$$+\infty - \infty; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{a}{0}$$

Relativamente a l'ultima relazione, essa è indeterminata nel caso in cui il denominatore tenda a zero senza che il suo segno sia definitivamente positivo o negativo.

Versione in Visione Gratuita

---

[1] si ricordi che x_0 è di accumulazione per D, se e solo se: $\forall r > 0 : r \in \mathbb{R}$ si abbia $\{]x_0 - r; x_0 + r[\cap D \setminus \{x_0\}\} \neq \phi$

6.3 Teoremi

Teorema 8 (Esistenza del Limite) *Sia f una funzione, definita in tutti i punti di un intervallo $]a,b[$, tranne al più che in un punto $x_0 \in]a,b[$.*
La funzione $f(x)$ ha limite $\lambda \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$, se e solo se il limite destro e sinistro di $f(x)$ per $x \to x_0$, esistono e coincidono entrambi con λ.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

Teorema 9 (Unicità del Limite) *Il limite di una funzione reale (finito o infinito), se esiste è unico.*

Teorema 10 (Monotonia del Limite o del confronto) *Siano f e g due funzioni reali definite in un intorno di x_0, tranne al più che in x_0. Supponiamo che esista un intorno $U(x_0)$ tale che: $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$. Se*

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \mu = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

allora $\lambda \leq \mu$.

Teorema 11 (Permanenza del segno) *Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un intorno di x_0 tranne, al più che in x_0. Supponiamo che $f(x)$ abbia limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$. Se $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$, allora esiste un intorno $U(x_0)$ tale che $f(x) > 0 \quad (f(x) < 0) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$*

Teorema 12 (Operazioni con i limiti finiti) *Siano f e g due funzioni reali definite in un intorno $U(x_0)$ tranne al più che in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, e due numeri reali λ e μ. Supponiamo che esistano finiti i limiti di $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to x_0$, cioè sia:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda L + \mu M$$

Teorema 13 (Criterio di Cauchy) *Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un intorno di x_0 tranne, al più che in x_0. La funzione $f(x)$ ha limite finito per $x \to x_0$, se e solo se:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Versione in Visione Gratuita

Capitolo 7

Continuità

7.1 Definizioni

Definizione 6 (di CONTINUITA') *Sia f una funzione reale di variabile reale, definita in un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$; si dirà che f è* ***CONTINUA*** *in $x_0 \in D$, se e solo se:*
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, *ovvero*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 7 (di Uniforme Continuità) *Si dice che f è Uniformemente continua in un insieme D, se e solo se:*
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x, y \in D, |x - y| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Definizione 8 (Funzione Lipschitziana) *Si dice che f è Lipschitziana in D, se esiste un numero L tale che: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in D$.*

Versione in Visione Gratuita

7.2 Teoremi

Teorema 18 (Continuità e Lipschitzianità) *Ogni funzione lipschitziana in D è uniformemente continua in D; ogni funzione uniformemente continua in D, è continua in D.*

Teorema 19 (Operazioni) *Siano f e g due funzioni reali definite e continue in un punto x_0; allora*

1. *La funzione $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ è continua in x_0.*
2. *La Funzione $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ è continua in x_0.*
3. *Se $g(x_0) \neq 0$, la funzione $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0*

Capitolo 8

La Derivata

8.1 Definizioni

Definizione 9 (Rapporto Incrementale) *Data una funzione f, per ogni coppia di punti distinti x, y appartenenti al suo dominio, si definisce* rapporto incrementale *di f, la relazione:*

$$R_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Definizione 10 (di Derivata) *Dato il rapporto incrementale $R_f(x_0, x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si definisce* derivata *di f calcolata in x_0, il seguente limite:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} R_f(x_0; x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione 11 (Rappresentazioni della Derivata) *Per rappresentare la derivata di f, esistono anche i seguenti simboli:*

$$\frac{df}{dx}(x_0) \qquad Df(x_0) \qquad \dot{f}(x_0)$$

Concetto 1 (Interpretazione del Differenziale) *Quella che segue, consiste nella interpretazione geometrica di uno dei concetti fondamentali dell'Analisi Matematica, per quanto concerne le funzioni reali di variabile reale. La stesura di tale concetto, verrà effettuata, a partire dal concetto di derivata.*

Versione in Visione Gratuita

Parte II

Analisi Matematica II

Versione in Visione Gratuità

13.1 Definizioni Importanti

Definizione 17 (DISTANZA) *Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce Distanza in A una qualunque funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}$, che soddisfi le seguenti condizioni:*

i) $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A, \text{si ha} \quad d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0; \quad \text{e } d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

ii) $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A, \text{si ha} \quad d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$ Proprietà Simmetrica

iii) $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in A, \text{si ha} \quad d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$ Dis. Triangolare

Distanza Euclidea Fra le infinite distanze che caratterizzano A, si definisce Distanza Euclidea, la funzione $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ (Norma del vettore differenza).

Definizione 18 (Sfera) *Si definisce Sfera di centro $\underline{x_0}$ e raggio r, e si indica col simbolo $S(\underline{x_0}, r)$, il seguente insieme:*

i) $S(\underline{x_0}, r) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x_0}, \underline{x}) < r \right\}$ ***(Sfera Aperta)***

ii) $S(\underline{x_0}, r) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x_0}, \underline{x}) \leq r \right\}$ ***(Sfera Chiusa)***

La sfera viene anche denominata "Intorno Circolare", e la sua forma geometrica non è necessariamente tonda, ma dipende dalla particolare distanza utilizzata; se tale distanza è quella Euclidea, allora la forma della sfera è tonda.

Definizione 19 (Punto di Accumulazione) *Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, il punto $\underline{x_0} \in A$ è di accumulazione per A, se e solo se $\forall S(\underline{x_0}, r)$ si ha: $S(\underline{x_0}, r) \cap \left\{ A \setminus \{\underline{x_0}\} \right\} \neq \phi$.*
L'insieme di tutti i punti di accumulazione di A, viene indicato con $\partial(A)$, e denominato: Derivato di A.

Definizione 20 (Intorno) *Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice "Intorno" di $\underline{x_0}$, se e solo se:*

i) $\underline{x_0} \in I$

ii) $\exists r > 0 : S(\underline{x_0}, r) \subseteq I$

Osservazione 2 *le Sfere sono intorni di ogni loro punto. Ogni Teorema valido per gli Intorni Circolari (Sfere), è, quindi, valido per qualsiasi Intorno.*

Versione in Visione Gratuita

Teorema 40 (delle Operazioni) *Siano $\underline{f}, \underline{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, due funzioni definite in $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\underline{x_0}$ un punto di accumulazione per D, siano inoltre $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; se*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l_1} \quad e \quad \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{g}(\underline{x}) = \underline{l_2}$$

allora si ha:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \Big(\lambda \underline{f}(\underline{x}) + \mu \underline{g}(\underline{x}) \Big) = \lambda \underline{l_1} + \mu \underline{l_2}$$

Teorema 41 (delle Funzioni Limitate) *Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, due funzioni definite in $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\underline{x_0}$ un punto di accumulazione per D; se*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = 0$$

e g è limitata in D, allora

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x}) = 0$$

Teorema 42 (Unicità del Limite) *Sia $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ il cui dominio sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\underline{x_0}$ un punto di accumulazione per D; se*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l_1} \quad e \quad \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l_2}$$

allora, necessariamente, deve essere $\underline{l_1} = \underline{l_2}$.

Teorema 43 (delle Restrizioni) *Sia $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definita in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $A \subseteq D$; sia pure $\underline{x_0}$ un punto d'accumulazione per A. Allora, se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$, deve necessariamente essere*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}|_A(\underline{x}) = \underline{l}$$

dove, con la notazione $\underline{f}|_A$, s'intende la restrizione di f effettuata in A. N.B. non è valido il teorema contrario; cioè se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}|_A(\underline{x}) = \underline{l}$, NON E' DETTO che $\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$

Come si vedrà più avanti, la seguente osservazione è di grande importanza pratica per la risoluzione dei limiti in più variabili.

Osservazione 3 (IMPORTANTE) *Il precedente teorema può essere utilizzato nel seguente modo: si trova il limite di una restrizione particolare di $\underline{f}$, sia $\underline{l}$ tale limite. Allora il limite di $\underline{f}$ su D, o è $\underline{l}$, oppure non esiste.*

Teorema 44 (Numero finito di Restrizioni) *Sia $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definita in $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e siano $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ un numero finito di restrizioni di D, tali che $\bigcup_{i=1}^m A_i = D \setminus \{\underline{x_0}\}$ e $\underline{x_0} \in \bigcap_{i=1}^m \partial(A_i)$; allora:*

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}|_A(\underline{x}) = \underline{l} \quad (\forall i = 1, 2, 3, \ldots, m) \quad \Rightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$$

N.B. Il teorema è valido soltanto nel caso in cui D abbia un numero finito di restrizioni, e non vale se D ne ha un numero infinito.

Versione in Visione Gratuita

13.3 Metodo di risoluzione dei Limiti, per passaggio a Coordinate Polari

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; in alcuni casi è utile rappresentare le variabili x ed y, in coordinate polari, ponendo:

$$\begin{cases} x = x(\rho, \theta) = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y(\rho, \theta) = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Si indichi con $\tilde{f}(\rho, \theta)$ la funzione ottenuta, sostituendo, al posto di x ed y, le corrispondenti espressioni in coordinate polari suddette.
Se si riesce a maggiorare la funzione $|\tilde{f}(\rho, \theta) - l|$ con una funzione che dipenda SOLTANTO da ρ (sia $\varphi(\rho)$ tale funzione maggiorante); cioè, se si riesce a porre:

$$|\tilde{f}(\rho, \theta) - l| \leq \varphi(\rho)$$

e se si ha che

$$\lim_{\rho \to 0^+} \varphi(\rho) = 0$$

allora si può affermare che

$$\lim_{\binom{x}{y} \to \binom{x_0}{y_0}} f(x, y) = l$$

13.4 Punti chiave per il calcolo di un Limite

1. Il primo passo da effettuare per calcolare un limite, è trovare il campo di definizione della funzione in esame $f(\underline{x})$, sia D tale insieme.

2. Calcolare il limite di $f(\underline{x})$, in una particolare restrizione $A \subseteq D$, scelta in maniera da semplificare tale calcolo. Il limite così calcolato, NON è il limite di $f(\underline{x})$ in D, ma un "candidato" limite, cioè, il limite o è quello trovato, oppure non esiste **(applicazione dell'osservazione 3)**.

3. Se non si riesce a trovare una restrizione adeguata, per dimostrare che il limite non esiste (trovando due restrizioni con limite differente), è probabile che il limite, invece, esista, e sia proprio quello trovato nella restrizione A; quindi si proceda con l'utilizzo dei teoremi sui limiti, o con il metodo del passaggio a coordinate polari.

Versione in Visione Gratuita

13.6 Derivabilità

13.6.1 Definizioni

Definizione 24 (Derivata lungo una direzione) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$, allora f è derivabile in $\underline{x_0} \in D$ nella direzione $\underline{v}$ (dove $\underline{v}$ è tale che $\|\underline{v}\| = 1$)* [2]*, se esiste finito il*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t}$$

il limite si chiama "derivata" di f in $\underline{x_0}$, lungo la direzione $\underline{v}$, e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) \triangleq \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t} \tag{13.1}$$

Definizione 25 (Derivata Parziale) *Con riferimento alla definizione precedente, se si prende $\underline{v} = \underline{e_i}$ (cioè uno dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$), la derivata, prenderà il nome di "derivata parziale", e si indicherà con uno dei seguenti simboli:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x_0}); \quad D_i f(\underline{x_0}); \quad f_{x_i}(\underline{x_0})$$

Definizione 26 (Gradiente) *Si definisce Gradiente di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il seguente vettore:*

$$\nabla f(\underline{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x_0}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x_0}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \right)$$

O, in forma più compatta:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Da notare che $\nabla f(\underline{x_0})$ è un vettore n-dimensionale, il simbolo ∇ si legge "Nabla".

Versione in Visione Gratuita

[2] $\underline{v}$ è un versore

Definizione 29 (Matrice Hessiana) *Data una funzione* $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$*, di classe* C^2 *in* D*; si definisce matrice Hessiana calcolata in* $\underline{x_0} \in D$*, la seguente matrice:*

$$H_f(\underline{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(dove le derivate parziali sono calcolate tutte in $\underline{x_0}$*)*
Da notare che, se f ***soddisfa il teorema di Schwartz*** [3]***, allora tale Matrice è Simmetrica.***

Osservazione 5 *La derivabilità di una funzione di più variabili, non implica niente, cioè una funzione potrebbe ammettere derivate parziali in un punto* $\underline{x_0}$*, o derivata lungo ogni direzione in* $\underline{x_0}$*, ma non essere neanche continua in* $\underline{x_0}$*!*
Per questo, si dice che, la derivata parziale non è l'estensione del concetto di derivata per le funzioni reali di variabile reale.

Versione in Visione Gratuita

[3]Vedi Teorema n.50, pag. 63

13.7 Differenziabilità

13.7.1 Definizioni

Definizione 30 (Differenziabilità delle funzioni scalari) *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si dice differenziabile in un punto $\underline{x}_0$, se esiste una funzione Lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (dipendente da $\underline{x}_0$) tale che*

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - L(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0$$

Se f è differenziabile in ogni punto del suo dominio (D), allora si dice che f è differenziabile in D, e la funzione lineare L prende il nome di "Differenziale" di f in $\underline{x}_0$.

Notazioni

- Differenziale Parziale: $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \cdot dx_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (13.3)$$
- Differenziale Totale: $$df(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \cdot dx_i \qquad (13.4)$$
- Differenziale lungo una direzione $\underline{v}$:

$$df(\underline{x}_0)(\underline{v}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = (\nabla f(\underline{x}_0)) \cdot \underline{v} \quad \text{(Prodotto Scalare)} \qquad (13.5)$$

13.7.2 Teoremi

Teorema 52 (Condizione necessaria alla Differenziabilità) *Se una funzione è differenziabile in un punto $\underline{x}_0$, allora è continua in $\underline{x}_0$*

Teorema 53 (Derivabilità delle Funzioni Differenziabili) *Se una funzione è differenziabile in un punto $\underline{x}_0$, allora è derivabile lungo ogni direzione, in $\underline{x}_0$; e, di conseguenza, ammette derivate parziali in $\underline{x}_0$.*

Osservazione 6 *Da questi teoremi, si deduce che la Differenziabilità di una funzione, è l'estensione formale del concetto di derivabilità, visto per le funzioni reali di variabile reale.*

Versione in Visione Gratuita

I rapporti fra i concetti di differenziabilità, derivabilità e continuità, possono essere riassunti nello schema seguente di implicazioni logiche, nel quale sono distinti il caso del dominio multidimensionale da quello del dominio monodimensionale.

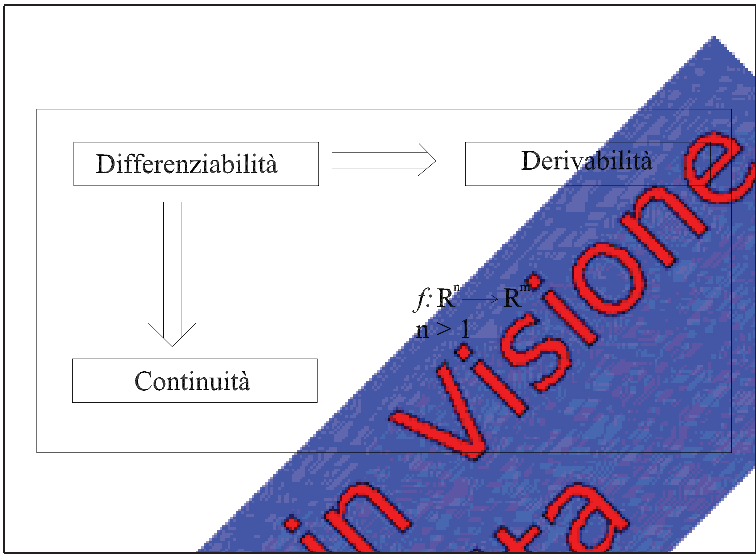


Figura 5 - (Caso Multidimensionale)
Le implicazioni che non compaiono, sono False

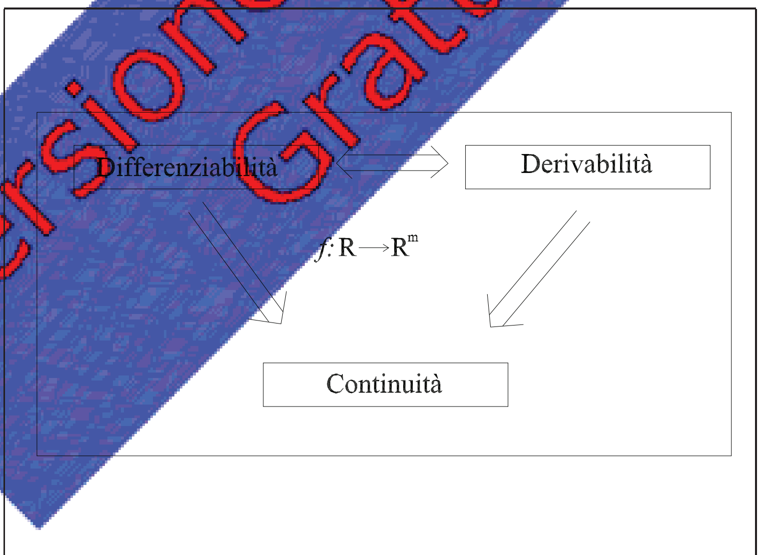


Figura 6 - (Caso Monodimensionale)
Le implicazioni che non compaiono, sono False

Versione in Visione Gratuita

Teorema 60 (Punto di Massimo) *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*, una funzione di classe* $C^2(A)$*. Sia* $\underline{x_0} \in A$ *un punto Stazionario per* f*.*
Si indichi con $H(\underline{x_0})$ *la matrice Hessiana di* f *calcolata in* $\underline{x_0}$*; affinché* $\underline{x_0}$ *sia di massimo relativo:*

- *è necessario che* $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ *risulti* $\Big(H(\underline{x_0}) \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}\Big) \leq 0$.[9]
- *E' sufficiente che* $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \neq 0$ *sia* $\Big(H(\underline{x_0}) \cdot \underline{v} \cdot \underline{v}\Big) < 0$.[10]

Versione in Visione
Gratuita

[9] Si dice che la matrice Hessiana è semi-definita negativa in $\underline{x_0}$
[10] Si dice che la matrice Hessiana è definita negativa in $\underline{x_0}$

13.8.1 Per funzioni di 2 Variabili

Sia $f(x,y)$ una funzione di classe $C^2(D)$ con $D =$ Dominio di f. Sia $\underline{x_0}$ un punto stazionario per f; sia $H_f(\underline{x_0}) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ l'Hessiana di f calcolata in $\underline{x_0}$; si ha che:

1. se det$H_f(\underline{x_0}) > 0$ e se $f_{xx}(\underline{x_0}) > 0$ allora $\underline{x_0}$ è di MINIMO relativo per f.
2. Se det$H_f(\underline{x_0}) > 0$ e se $f_{xx}(\underline{x_0}) < 0$ allora $\underline{x_0}$ è di MASSIMO relativo per f
3. Se det$H_f(\underline{x_0}) < 0$, allora $\underline{x_0}$ è di SELLA per f.
4. Se det$H_f(\underline{x_0}) = 0$, allora non si può affermare nulla, e bisogna studiare il segno di $f(\underline{x}) - f(\underline{x_0})$.

Versione in Visione Gratuita

13.10 Funzioni Implicite

Teorema 62 (del Dini) *Sia* $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *continua e derivabile rispetto ad* y *in un insieme aperto* D. *Sia* $f(x_0, y_0) = 0$ *e* $f_y(x_0, y_0) \neq 0$; *allora esistono due intorni* $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *e* $V = (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$, *con* $\delta, \eta \in \mathbb{R} : \delta, \eta > 0$; *tali che valga la seguente proprietà:*

$$\forall x \in U, \exists \text{ un solo } y \in V : f(x, y) = 0$$

Ovvero esiste una funzione $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$, *tale che* $f\Big(x, \varphi(x)\Big) = 0$; *e si dice che* $f(x, y) = 0$ *definisce* *<u>implicitamente</u> la funzione* $y = \varphi(x)$, *cioè l'insieme degli zeri di* f, *è un grafico cartesiano locale.*

Teorema 63 (Differenziabilità della funzione esplicitata) *Nelle ipotesi del teorema del Dini, si ha che:*

1. φ *è continua in* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
2. *Se* f_x *è continua in* D, *allora si ha che* $\dot{\varphi}(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$.

Corollario 2 (Differenziabilità della funzione esplicitata) *Nelle ipotesi del teorema del Dini, se* $f \in C^k(D)$, *allora anche* φ *è di classe* $C^k(D)$.

Conseguenze del teorema del Dini

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, è di classe C^1, ed è $\nabla f \neq 0$ in un intorno di $\underline{x_0} = (x_0, y_0)$, allora, in tale intorno $f(x, y) = 0$ definisce un arco di curva semplice e regolare[12].

Equazione della retta tangente

L'equazione della retta tangente il grafico di $\varphi(x)$ nel punto $\underline{x_0} = (x_0, y_0)$, è data da

$$y - y_0 = \dot{\varphi}(\underline{x_0}) \cdot (x - x_0)$$

Ricordando che $\dot{\varphi}(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$, l'equazione precedente, può essere scritta anche:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

[12]Una curva semplice e Regolare è una curva che ammette, in ogni suo punto, retta tangente

Versione in Visione Gratuita

Parte III

Analisi Matematica III

Versione in Visione Gratuita

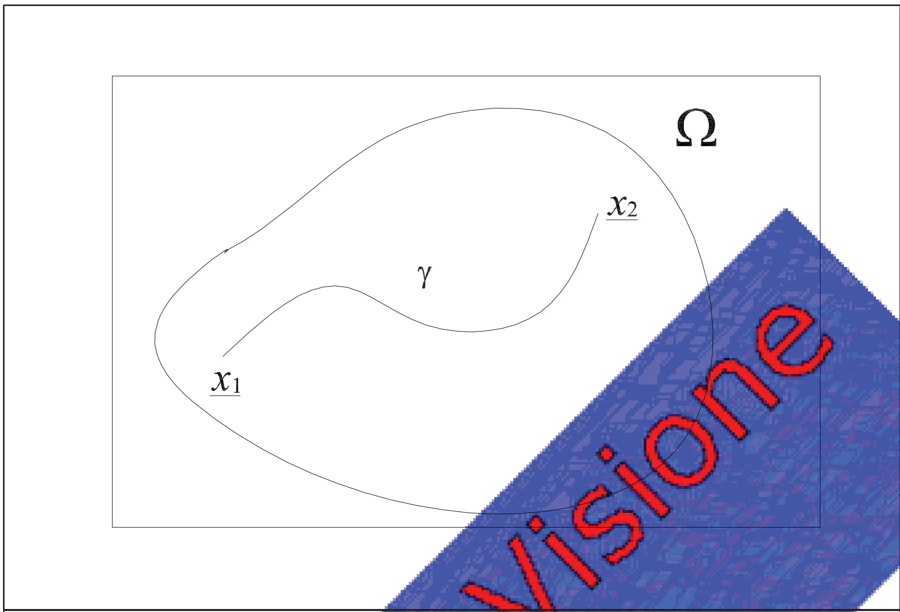


Figura 33 - Insieme Connesso
$\{\gamma\} \in \Omega$

Versione in Visione Gratuita

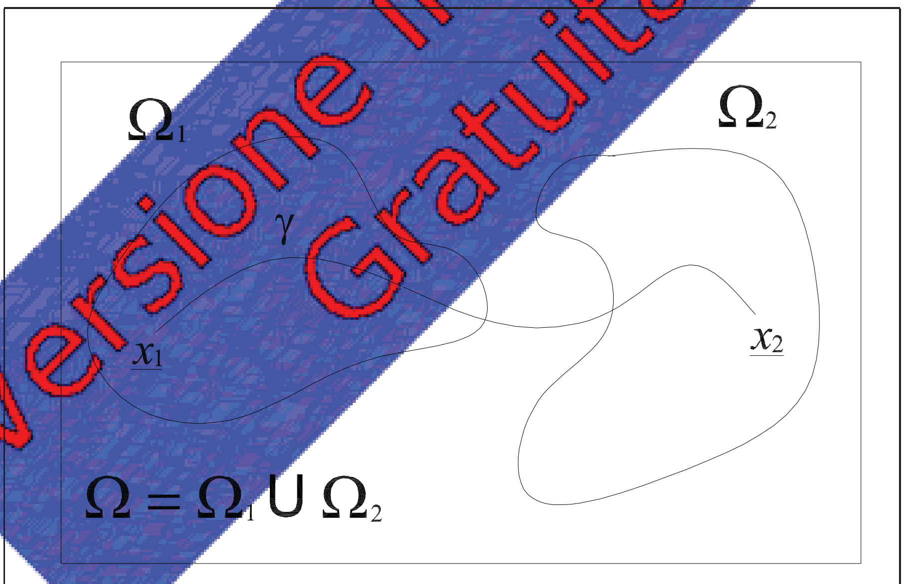


Figura 34 - Insieme Sconnesso
$\{\gamma\} \notin \Omega$

Definizione 71 (Potenziale Scalare) *Sia dato un campo vettoriale* $\underline{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, definito in un aperto Connesso* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*; si dirà che la funzione scalare* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è un Potenziale Scalare di* $\underline{F}$*, se, e solo se,*

$$\nabla f = \underline{F}$$

Definizione 73 (Rotore) *Dato un campo vettoriale $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è l'insieme di definizione di $\underline{F}$, si definisce **Rotore** di $\underline{F}$ il seguente Vettore:*

$$\mathrm{rot}(\underline{F}) = \begin{vmatrix} \underline{e_1} & \underline{e_2} & \underline{e_3} & \dots & \underline{e_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_n \end{vmatrix}$$

Dove i vettori $\underline{e_i}$ sono i versori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. In forma compatta, e con il solito abuso di linguaggio, si può scrivere:

$$\mathrm{rot}(\underline{F}) = \bar{\nabla} \times \underline{F}$$

Definizione 74 (Campo Conservativo) *Un campo vettoriale si dice Conservativo se, e solo se, l'integrale su qualsiasi curva γ chiusa sufficientemente regolare è nullo, o equivalentemente, se e solo se, l'integrale su una curva aperta, sufficientemente regolare, dipende soltanto dagli estremi e non dalla particolare curva γ.*

Teorema 92 (Condizione d'esistenza del potenziale Scalare) ***Condizione necessaria e sufficiente** per l'esistenza del potenziale scalare di un campo vettoriale $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare, è che il campo stesso sia Conservativo.*

Definizione 75 (Dominio Semplicemente Connesso) *Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso, se e solo se, **ogni curva chiusa** $\{\gamma\} \subseteq \Omega$, è il bordo di una superficie Σ interamente contenuta in Ω.*

Corollario 5 (Campo in un dominio Semplicemente Connesso) *Sia $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ con Ω dominio aperto **semplicemente connesso**, allora condizione necessaria e sufficiente affinché il campo ammetta potenziale scalare è che sia: $\mathrm{rot}\underline{F} = 0$ in Ω.*

Definizione 76 (Campo Radiale) *Un campo vettoriale $\underline{F}$, si dice **radiale**, se il suo modulo $\|\underline{F}\|$ dipende soltanto dalla distanza dal polo, e la sua direzione è 'radiale', cioè coincide con quella della congiungente il polo, con il punto in cui è applicato il campo.*

$$\underline{F}(\underline{x}) = \varphi(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)\frac{\underline{x} - \underline{x_0}}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|} = \psi(\|\underline{x} - \underline{x_0}\|)(\underline{x} - \underline{x_0})$$

Corollario 6 (Potenziale scalare di campi Radiali) *Ogni campo vettoriale Radiale, ammette potenziale scalare.*

Versione in Visione Gratuita

Definizione 78 (Orientamento Frontiera) *Dato un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, la cui frontiera sia un arco di curva regolare; si indicherà con $+\partial\Omega$ la frontiera orientata positivamente. Il verso positivo è quello di percorrenza di un "omino" che vede la regione dell'insieme Ω, alla sua sinistra.*

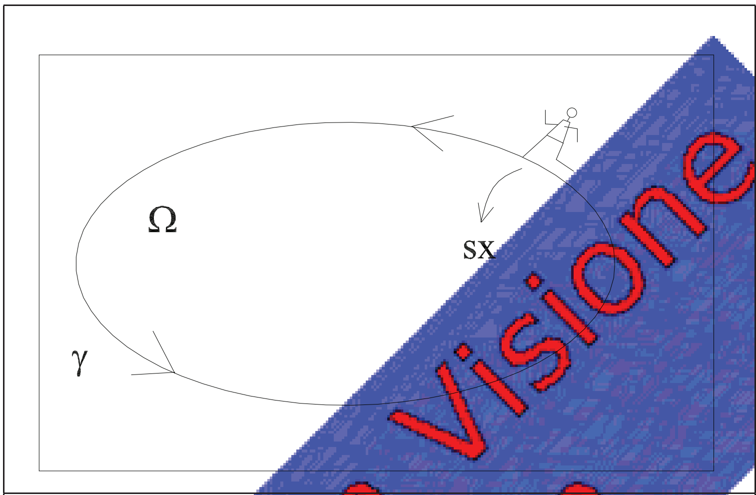


Figura 36 - Convenzione Positiva

17.2.1 Formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^2$

Siano f e g due funzioni di classe $C^1(D)$, dove D è un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$; allora si ha:

i)
$$\iint_D \partial_x f(x,y)dxdy = \int_{+\partial D} f dy$$

ii)
$$\iint_D \partial_y g(x,y)dxdy = -\int_{+\partial D} g dx$$

Osservazione 32 (Area del Dominio) *Se si vuole calcolare l'area della superficie rappresentata da $D \subseteq \mathbb{R}^2$, basta calcolare uno dei seguenti integrali curvilinei:*

$$m(D) = \int_{+\partial D} x dy = -\int_{+\partial D} y dx = \frac{1}{2}\int_{+\partial D} x dy - y dx$$

Definizione 79 (Divergenza in $\mathbb{R}^2$) *Dato un campo vettoriale $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$, la Divergenza di $\underline{F}$, è data da:*

$$\mathrm{div}(\underline{F}) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$$

Dove, con $F_1 = F_1(x,y)$ ed $F_2 = F_2(x,y)$ si sono indicate le due componenti di $\underline{F}$.

Versione in Visione Gratuita

assumere una conformazione spiraleggiante in una regione sufficientemente piccola del dominio del campo $\underline{F}$. *Se in tale regione, le linee di forza assumono tale conformazione, allora* $\mathrm{rot}(\underline{F}) \neq 0$*; se, invece, non assumono una conformazione spiraleggiante, allora il campo si dirà* ***Irrotazionale****, e sarà* $\mathrm{rot}(\underline{F}) = 0$.
(Vedi figure seguenti)

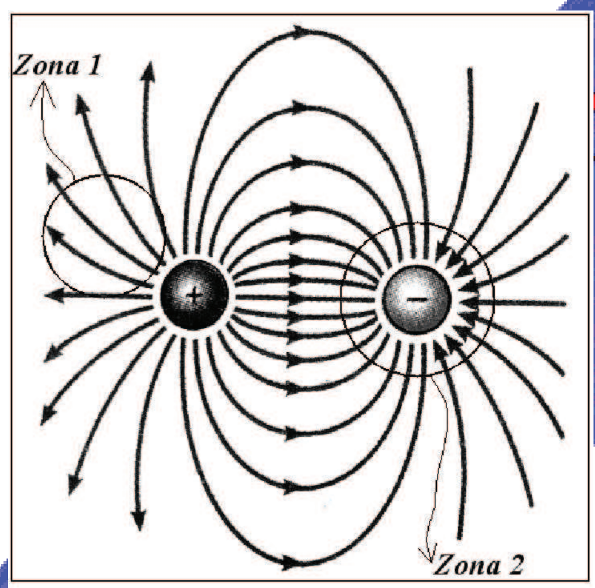


Figura 37 - Divergenza: in Zona 1 div$\underline{F} = 0$,
al centro della Zona 2 div$\underline{F} \neq 0$

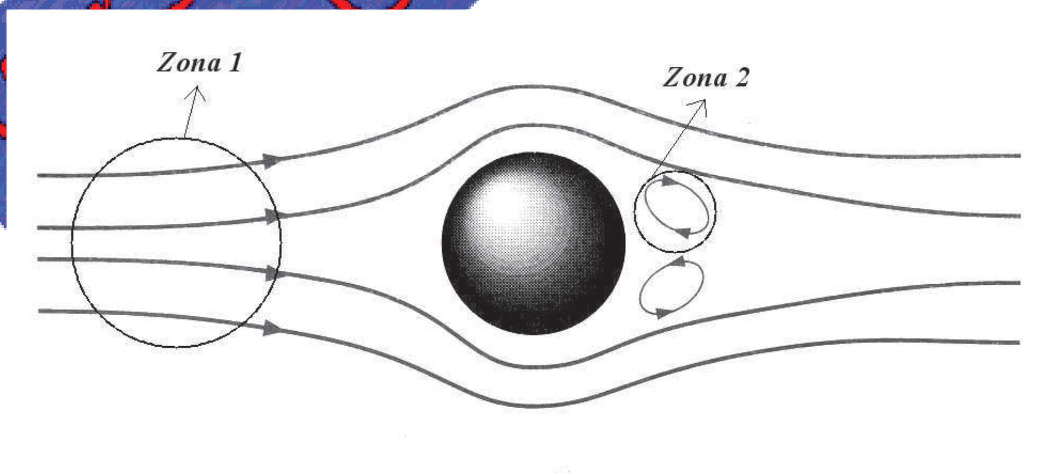


Figura 38 - Rotore: in Zona 1 rot$\underline{F} = 0$,
in Zona 2 rot$\underline{F} \neq 0$

Corollario 7 *Sia dato un campo vettoriale di classe C^1 in un aperto regolare Ω, e sia $x_0 \in \Omega$; allora si ha:*

$$\text{div}\underline{F}(\underline{x_0}) = \lim_{r \to 0^+} \frac{\Phi_{+\partial S(\underline{x_0},r)}}{m\Big(S(\underline{x_0},r)\Big)}$$

Dove $m\Big(S(\underline{x_0},r)\Big)$ è la misura della Sfera di centro x_0 e raggio r, e

$$\Phi_{+\partial S(\underline{x_0},r)} = \int_{\partial S(\underline{x_0},r)} \underline{F} \cdot \underline{n}_+ ds$$

Osservazione 35 *Si può dire che:* div$\underline{F} = 0$ *se, e solo se, è nullo il flusso uscente dalla frontiera di qualsiasi **Dominio** di $\underline{F}$.*
*N.B. **Non tutte le superfici chiuse** contenute nel campo di esistenza Ω del campo vettoriale, sono la frontiera di un **Dominio** di $\underline{F}$ contenuto in Ω.*

Teorema 96 (di Stokes) *Sia dato un campo vettoriale $\underline{F}$ di classe C^1 in un dominio aperto Ω, e sia Σ una porzione di superficie semplice, regolare e a due facce , immagine di un dominio regolare, connesso D di $\mathbb{R}^2$. Allora è:*

$$\Phi_{+\Sigma}(\text{rot}(\underline{F})) = \iint_{+\Sigma} \text{rot}\underline{F} \cdot \underline{n}_+ d\sigma = \int_{+B\Sigma} \underline{F} \cdot d\underline{\alpha} = \int_{+B\Sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

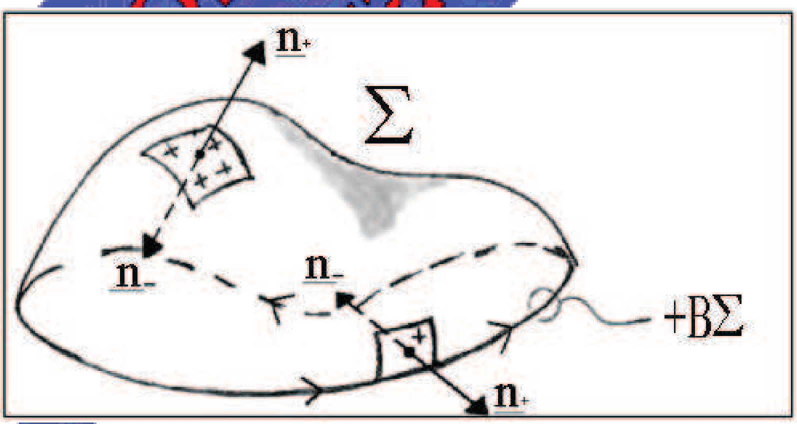


Figura 39 - Verso positivo di una superficie e del suo Bordo

Per fissare l'orientamento della superficie Σ, si indica con $\underline{n}_+$ il versore normale a Σ che punta dalla parte della faccia, convenzionalmente, positiva. Per l'orientamento del Bordo, si consideri il versore $\underline{n}_+$ preso in prossimità del bordo di Σ; il verso positivo di $B\Sigma$ (indicato con $+B\Sigma$) è quello che, visto da $\underline{n}_+$, punta in senso antiorario.

Versione in visione gratuita

Definizione 86 (Dominio Stellato) *Un dominio Ω si dice* ***stellato*** *rispetto ad un punto $\underline{x_0} \in \Omega$, se il segmento che congiunge $\underline{x_0}$ con qualsiasi altro punto $\underline{x}$ del dominio, è interamente contenuto in Ω.*

Teorema 99 (Insiemi Stellati e Semplicemente Connessi) *Ogni insieme stellato, è semplicemente connesso. Non è vero il viceversa.*

Teorema 100 (Potenziale vettoriale e domini stellati) *Sia dato un campo vettoriale $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ dove Ω è un dominio aperto regolare e* **stellato rispetto al punto $\underline{x_0}$, allora se $\mathrm{div}\underline{F} = 0$, il campo ammette potenziale vettoriale in Ω.**

Versione in Visione Gratuita

18.1.1 Quando Ω NON è CONNESSO

Se $\underline{F}$ ha come curve singolari, rette o curve illimitate (che si estendono all'infinito), allora Ω non è Connesso (N.B. **Insieme Connesso** ed **Insieme Semplicemente Connesso**, sono due concetti distinti); allora non ha senso ricercare il potenziale scalare in Ω, globalmente, ma spesso, si può suddividere Ω in tanti insiemi $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ connessi, tali che $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$; e ricercare il potenziale scalare di $\underline{F}$ in ciascun insieme Ω_i.

18.1.2 Quando Ω non è Semplicemente Connesso

Si possono adottare i due seguenti metodi:

1. Il seguente metodo è alquanto rischioso, poiché può costituire fonte di errori anche molto gravi; tuttavia esso costituisce una via molto rapida per assicurare l'esistenza del potenziale scalare e contemporaneamente, calcolarne l'espressione matematica.
   Anche se non si ha la garanzia che il potenziale scalare, $f(x, y)$, esista, si calcoli comunque (vedi 18.1.3). Se $f(x, y)$ è definita in Ω, oppure in un insieme $\Omega_* \supset \Omega$ (cioè Ω_* è più grande di Ω); allora $\underline{F}$ ammette potenziale scalare, ed è proprio uguale all'$f(x, y)$ calcolato.
   N.B. Se l'insieme di definizione Ω_* di $f(x, y)$ è tale che $\Omega \supset \Omega_*$ (cioè Ω_* è più piccolo di Ω); allora l'$f(x, y)$ calcolato, non è il potenziale scalare di $\underline{F}$, che potrebbe anche non ammettere tale potenziale! In questo caso è necessario seguire quanto riportato nel seguente punto 2

2. Nella grande maggioranza dei casi, si verifica che Ω non corrisponda ad $\mathbb{R}^2$ (che è un dominio semplicemente connesso), ma vi siano dei "buchi", cioè degli elementi di piano in cui il campo vettoriale è singolare. I 'buchi' possono avere la seguente natura:

   - **Punti Singolari**, cioè tutti quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui $\underline{F}$ non è definito (di solito quei punti che annullano il denominatore delle componenti di $\underline{F}$)
   - **Superfici o Curve Chiuse** in $\mathbb{R}^2$
   - **Segmenti o Curve aperte limitate**

   In questi casi si rende necessario il calcolo della circuitazione del campo vettoriale $\underline{F}$, lungo una qualsiasi curva chiusa γ interamente contenuta in Ω, che circondi il 'buco'. Se l'espressione matematica del campo vettoriale è piuttosto complessa, si può considerare come curva γ il quadrato che circonda il 'buco'.
   Bisogna, quindi, calcolare

$$I = \oint_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

Versione in Visione Gratuita

Potenziale Vettoriale

In $\mathbb{R}^2$ il potenziale vettoriale di un campo $\underline{F}$, è un vettore ortogonale al piano a cui appartiene $\underline{F}$; quindi, contrariamente a quanto ci si possa aspettare, dato un campo vettoriale $\underline{F}$ definito in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, il potenziale vettoriale (se esiste) di $\underline{F}$, è un vettore di $\mathbb{R}^3$, dato da:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_z \end{pmatrix}$$

Il calcolo di $\underline{G}$ consiste quindi, nel solo calcolo della componente G_z. Per vedere se $\underline{F}$ ammette potenziale vettoriale, osservare i seguenti punti:

1. Si determini l'insieme di definizione di $\underline{F}$; sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tale insieme.
2. Si verifichi che $\underline{F} \in C^1(\Omega)$.
3. Si calcoli div$\underline{F}$.
4. Se div$\underline{F} = 0 \quad \forall\binom{x}{y} \in \Omega$, si osservi la natura di Ω, cioè:
   - Se Ω è Stellato, allora il campo vettoriale $\underline{F}$ ammette, sicuramente, potenziale vettoriale.
   - Se Ω non è Stellato, si deve operare in maniera descritta in 18.1.4
5. Se div$\underline{F} \neq 0$, allora $\underline{F}$ non ammette potenziale vettoriale, e la ricerca è conclusa.

18.1.4 Quando Ω non è Stellato

Quando Ω non è Stellato, si consideri una qualsiasi curva chiusa γ, che circondi un solo 'buco' (se vi sono 'n' buchi, il calcolo deve essere effettuato 'n' volte) , e si calcoli il FLUSSO $\Phi_\gamma(\underline{F})$ di $\underline{F}$ attraverso la curva[1] stessa γ (vedi figura sottostante); si hanno i due seguenti casi:

i) $\Phi_\gamma(\underline{F}) = 0$, allora $\underline{F}$ ammette potenziale vettoriale.

ii) $\Phi_\gamma(\underline{F}) \neq 0$, allora $\underline{F}$, non ammette potenziale vettoriale, e la ricerca è conclusa.

[1]Vedi la definizione n. 77, a pag. 124

Versione in Visione Gratuita

dalla quale si ricava $\varphi'(x)$ e quindi $\varphi(x)$, che, sostituita nella prima equazione, dà il potenziale vettoriale cercato.

ii)

$$G_z = \int \partial_x G_z dx + \psi(y) \Rightarrow G_z = \int -F_2 dx + \psi(y)$$

Dove $\psi(y)$ è una funzione nella sola variabile y. Quindi

$$\partial_y G_z = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int -F_2 dx\right) + \psi'(y) = F_1$$

dalla quale si ricava $\psi'(y)$ e quindi $\psi(y)$, che, sostituita nella prima equazione, dà il potenziale vettoriale cercato.

Versione in Visione Gratuita

6. Se rot$\underline{F} \neq (0,0,0)$, allora il campo vettoriale non ammette potenziale scalare, e la ricerca è conclusa.

19.1.1 Insieme Sconnesso in $\mathbb{R}^3$

Se $\underline{F}$ ha come superfici singolari uno o più Piani, allora Ω non è **Connesso**; in questo caso, valgono le solite considerazioni viste, a suo tempo, per i campi in $\mathbb{R}^2$ (Vedi paragrafo 18.1.1).

19.1.2 Insieme non Semplicemente Connesso in $\mathbb{R}^3$

Anche in $\mathbb{R}^3$ si possono utilizzare le osservazioni fatte al paragrafo 18.1.2, con le dovute modifiche, poiché si sta trattando lo spazio e non il piano. Si seguano i seguenti punti

1. Vedi Punto 1 paragrafo 18.1.2

2. In $\mathbb{R}^3$ non si parla di "Buchi", ma di "Tagli"; infatti un punto singolare del campo, non rompe la connessione semplice di $\mathbb{R}^3$. I "Tagli" possono avere la seguente natura:

    - Rette o Curve illimitate da entrambi i lati
    - Curve Chiuse

    In questi casi si rende necessario il calcolo della circuitazione del campo vettoriale $\underline{F}$, lungo una qualsiasi curva chiusa γ <u>interamente contenuta in Ω</u>, che circondi il "Taglio" (cioè la retta, la curva chiusa o la curva illimitata), e trarre le stesse conclusioni viste al punto 2 del paragrafo 18.1.2.

    N.B.: se gli "Elementi Singolari" , sono punti, semirette, curve Aperte o superfici limitate, questi non rompono la connessione semplice di $\mathbb{R}^3$; cioè, se, per esempio, $\underline{F}$ è definito in tutto $\mathbb{R}^3$ tranne che in un punto (oppure una semiretta o una curva Aperta ecc.), Ω **è Semplicemente Connesso**[3].

Versione in Visione Gratuita

[3]Vedi Definizione n. 75 a pag.123