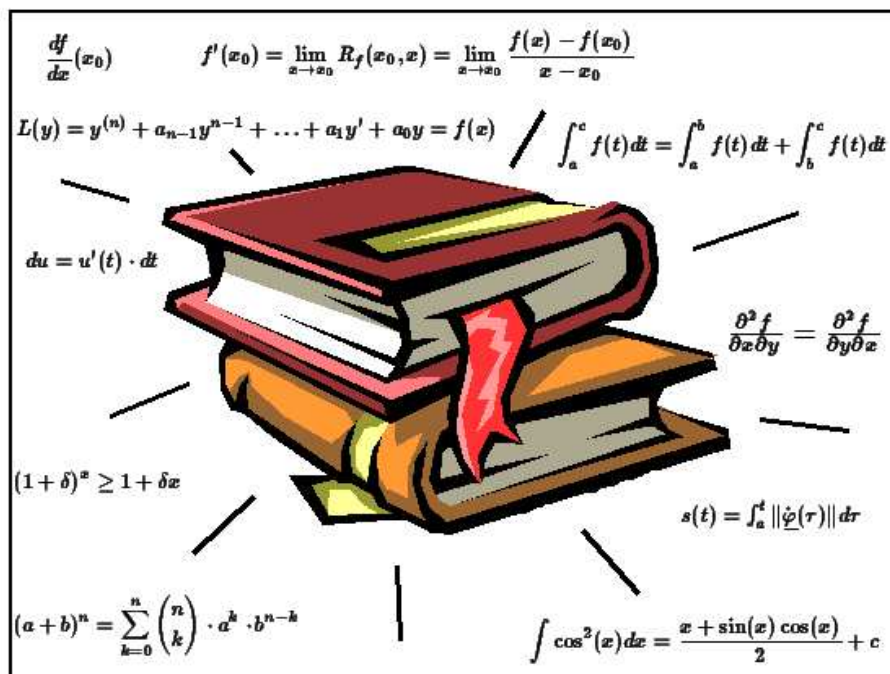


# Prontuario di Analisi Matematica

(per Ingegneria)



(Praticò Andrea)

## Prefazione

*“Dedicato ai miei genitori, con affetto e stima”*

Il presente volume, vuole essere d'aiuto a tutti coloro che, come me, hanno a che fare con lo studio dell'Analisi Matematica o di materie che rivestano un carattere scientifico e tecnico, a livello universitario. Tuttavia in questo testo non verrà esposta alcuna dimostrazione per i teoremi che vi compaiono (per tali approfondimenti, si rimanda a testi universitari completi), ma soltanto il loro enunciato, ed il loro dominio di utilizzo.

Potrei affermare che questo testo è caratterizzato da una conformazione manualistica, e può servire come indispensabile riferimento durante un esame scritto.

Naturalmente esso non può, in nessun caso, sostituire un libro di testo, poiché, per comprendere appieno il suo contenuto è importante conoscere alla perfezione tutti i concetti espressi.

La ragione che mi ha spinto a completare la stesura di questo testo è, prevalentemente, legata alla praticità con la quale si può accedere ai concetti e teoremi di più frequente utilizzo, ritenuti in taluni casi, di difficile comprensione; osservandoli dal punto di vista della risoluzione di problemi ingegneristici.

Ritengo, inoltre, che il presente testo rappresenti un'utile guida per sostenere gli esami di Analisi Matematica I,II relativi ai corsi di Ingegneria Elettrica, Eletttronica, Meccanica ecc, e a tutti quei corsi in cui sono presenti esami di Analisi standard (vengono quindi, in qualche modo, esclusi tutti gli esami in cui lo studio dell'Analisi è rivolta ad un approccio non standard). Posso, in tutta franchezza, affermare che, per me è stato un grande compagno di studio, soprattutto durante gli esami scritti di Analisi I e II, e Fisica I e II, e mi ha permesso di ottenere ottimi risultati, anche relativamente ad altre materie; quindi posso avere la convinzione, che sarà utile anche al lettore!

Andrea Praticò (Pisa 23/09/2000)

Per eventuali indicazioni, suggerimenti o critiche  
scrivere all'indirizzo E-Mail: [xenonbd@tiscalinet.it](mailto:xenonbd@tiscalinet.it)  
Oppure collegarsi all'indirizzo: <http://web.quipo.it/Analisi>

Testo eseguito con:  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$

III Edizione (Settembre 2004)

# Indice

<b>I</b>	<b>Analisi Matematica I</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>Derivate e Primitive</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Formule e Relazioni Generali</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Formule Trigonometriche</b>	<b>15</b>
3.1	Somma di Angoli . . . . .	15
3.2	Formule di Bisezione . . . . .	15
3.3	Formule di Prostaferesi . . . . .	16
3.4	Formule di Werner . . . . .	16
3.5	Formule Varie . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Geometria Elementare</b>	<b>18</b>
4.1	Circonferenza . . . . .	18
4.2	Ellisse . . . . .	18
4.3	Iperbole . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Serie di Successioni</b>	<b>19</b>
5.1	Teoremi . . . . .	19
5.2	Serie Notevoli . . . . .	21
5.2.1	Serie Geometrica . . . . .	21
5.2.2	Serie Armonica . . . . .	21
5.2.3	Serie Varie . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Limiti</b>	<b>22</b>
6.1	Limiti Notevoli . . . . .	22
6.1.1	Limiti di Successioni . . . . .	22
6.1.2	Limiti di Funzioni . . . . .	23
6.2	Definizioni . . . . .	24
6.3	Teoremi . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Continuità</b>	<b>28</b>
7.1	Definizioni . . . . .	28
7.2	Teoremi . . . . .	28

<b>8</b>	<b>La Derivata</b>	<b>30</b>
8.1	Definizioni . . . . .	30
8.2	Teoremi . . . . .	33
<b>9</b>	<b>Funzioni Reali</b>	<b>35</b>
9.1	Studio di Funzioni Reali . . . . .	36
9.2	Volumi di Solidi di Rotazione . . . . .	38
9.3	Lunghezza di un arco di curva . . . . .	38
<b>10</b>	<b>Formula, e sviluppi in serie di Taylor</b>	<b>39</b>
10.1	Resto di Peano . . . . .	39
10.2	Resto di Lagrange . . . . .	40
10.3	Alcuni Sviluppi in serie di Taylor . . . . .	40
<b>11</b>	<b>Calcolo Integrale</b>	<b>42</b>
11.1	Primitive di alcune funzioni . . . . .	42
11.2	Teoremi . . . . .	44
11.3	Primitive Particolari . . . . .	45
11.4	Sostituzione della variabile di integrazione . . . . .	46
11.5	Primitive di Funzioni Razionali . . . . .	47
11.6	Integrali Impropri . . . . .	48
11.6.1	Esempi di Integrali Impropri . . . . .	48
11.7	Integrali e Serie . . . . .	49
<b>12</b>	<b>Numeri Complessi</b>	<b>50</b>
12.1	Operazioni con i numeri Complessi . . . . .	50
12.1.1	Formule di Eulero . . . . .	51
<b>II</b>	<b>Analisi Matematica II</b>	<b>52</b>
<b>13</b>	<b>Funzioni di “n” Variabili</b>	<b>53</b>
13.1	Definizioni Importanti . . . . .	54
13.2	Limiti di Funzioni di n variabili . . . . .	55
13.2.1	Definizioni . . . . .	55
13.2.2	Teoremi . . . . .	55
13.3	Metodo di risoluzione dei Limiti, per passaggio a Coordinate Polari . . . . .	58
13.4	Punti chiave per il calcolo di un Limite . . . . .	58
13.5	Continuità . . . . .	59
13.5.1	Definizioni . . . . .	59
13.5.2	Teoremi . . . . .	59
13.6	Derivabilità . . . . .	60
13.6.1	Definizioni . . . . .	60
13.6.2	Teoremi . . . . .	63

13.7	Differenziabilità . . . . .	64
13.7.1	Definizioni . . . . .	64
13.7.2	Teoremi . . . . .	64
13.8	Punti di Massimo e minimo Relativi . . . . .	67
13.8.1	Per funzioni di 2 Variabili . . . . .	70
13.9	Punti di Massimo e minimo Vincolati . . . . .	71
13.10	Funzioni Implicite . . . . .	72
<b>14</b>	<b>Equazioni Differenziali</b>	<b>76</b>
14.1	Definizioni . . . . .	76
14.2	Problema di Cauchy . . . . .	77
14.3	Problema ai Limiti . . . . .	77
14.4	Equazioni del Primo Ordine . . . . .	78
14.4.1	Teoremi . . . . .	78
14.5	Studio a-priori ed a-posteriori . . . . .	79
14.6	Equazioni Differenziali Lineari . . . . .	82
14.6.1	Equazione diff. Lineare del Primo ordine a coefficiente Continuo . . . . .	83
14.7	Equazioni Differenziali Lineari di ordine “n” a coefficienti Costanti . . . . .	84
14.7.1	Equazione Omogenea . . . . .	84
14.7.2	Equazione Non Omogenea . . . . .	85
14.7.3	Metodo delle Costanti Arbitrarie di Lagrange . . . . .	85
14.7.4	Metodo delle Funzioni Simili . . . . .	85
<b>15</b>	<b>Successioni e Serie di Funzioni Reali</b>	<b>88</b>
15.1	Successione di Funzioni . . . . .	88
15.2	Serie di Funzioni Reali di Variabile Reale . . . . .	89
15.3	Serie di potenze in campo reale . . . . .	93
15.4	Come studiare le serie di funzioni . . . . .	96
15.4.1	I legami tra i quattro tipi di convergenza . . . . .	96
15.4.2	Come procedere nello studio delle serie di funzioni . . . . .	97
<b>16</b>	<b>Geometria Differenziale</b>	<b>98</b>
16.1	Lunghezza di un arco di curva . . . . .	98
16.2	Integrale Curvilineo . . . . .	101
16.2.1	Interpretazione Geometrica dell'integrale curvilineo . . . . .	102
16.3	Integrali di Linea . . . . .	104
16.4	Integrale Doppio . . . . .	105
16.4.1	Calcolo dell'Integrale Doppio . . . . .	106
16.5	Integrale Triplo . . . . .	110
16.5.1	Calcolo dell'Integrale Triplo . . . . .	111
16.6	Integrale di Superficie . . . . .	117
16.6.1	Calcolo dell'integrale di Superficie . . . . .	117

<b>III</b>	<b>Analisi Matematica III</b>	<b>119</b>
<b>17</b>	<b>Forme Differenziali</b>	<b>120</b>
17.1	Forme e Relazioni Generali . . . . .	120
17.2	Forme e Relazioni in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	124
17.2.1	Formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	125
17.3	Forme e Relazioni in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	128
17.3.1	Formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	128
<b>18</b>	<b>Studio dei campi vettoriali in <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>132</b>
18.1	Verifica dell'esistenza, e calcolo dei Potenziali . . . . .	132
18.1.1	Quando $\Omega$ NON è CONNESSO . . . . .	133
18.1.2	Quando $\Omega$ non è Semplicemente Connesso . . . . .	133
18.1.3	Calcolo del Potenziale Scalare . . . . .	134
18.1.4	Quando $\Omega$ non è Stellato . . . . .	135
18.1.5	Calcolo del Potenziale Vettoriale . . . . .	136
<b>19</b>	<b>Studio dei campi vettoriali in <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>138</b>
19.1	Verifica dell'esistenza, e calcolo dei Potenziali . . . . .	138
19.1.1	Insieme Sconnesso in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	139
19.1.2	Insieme non Semplicemente Connesso in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	139
19.1.3	Calcolo del Potenziale scalare . . . . .	140
19.1.4	Se $\Omega$ non è stellato . . . . .	141
19.1.5	Calcolo del Potenziale Vettoriale . . . . .	142
<b>20</b>	<b>Equazioni Differenziali</b>	<b>143</b>
20.1	Integrazione per Serie . . . . .	143
20.2	Soluzioni Periodiche . . . . .	145
20.3	Esistenza ed Unicità delle Soluzioni . . . . .	146
20.4	Dipendenza Continua dai Dati . . . . .	147
20.5	Equazioni Autonome Scalari . . . . .	148
20.5.1	Esempio di Equazione Autonoma . . . . .	148
20.6	Stabilità secondo Ljapunov . . . . .	149
20.6.1	Esempio di Stabilità Asintotica . . . . .	150
20.7	Linearizzazione delle Equazioni Autonome . . . . .	151
20.8	Esempio di Linearizzazione . . . . .	154
<b>21</b>	<b>La Trasformata di Laplace</b>	<b>156</b>
21.1	Trasformate ed Anti-trasformate di Funzioni . . . . .	156
21.2	Proprietà basilari . . . . .	159
21.3	Derivata della Trasformata . . . . .	160
21.4	Tecniche di Anti-Trasformazione . . . . .	161
21.4.1	Caso 1: $m \geq n$ . . . . .	161
21.4.2	Caso 2: $m < n$ . . . . .	162

21.4.3	Esempio di Antri-Trasformazione . . . . .	164
21.5	Applicazione della Trasformata di Laplace . . . . .	166
<b>22</b>	<b>Funzioni Complesse</b>	<b>167</b>
22.1	Olomorfia . . . . .	167
22.2	Serie di Potenze . . . . .	168
22.2.1	Calcolo degli Integrali Principali di Cauchy . . . . .	170
<b>23</b>	<b>Esponenziale di matrice</b>	<b>173</b>
23.1	Parte Teorica . . . . .	173
23.2	Impostazioni preliminari . . . . .	174
23.2.1	Primo Metodo . . . . .	175
23.2.2	Secondo Metodo . . . . .	177
23.3	Esempio di Calcolo . . . . .	177
23.3.1	Applicazione del Primo Metodo . . . . .	178
23.3.2	Applicazione del Secondo Metodo . . . . .	180
<b>24</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>183</b>
24.1	Introduzione . . . . .	183
24.2	Sviluppo . . . . .	184
24.3	Interpretazione dello Sviluppo di Fourier . . . . .	185
24.4	Sistema Ortogonale in $[-c, c]$ . . . . .	186
24.5	Teoremi per la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier . . . . .	186
24.6	Esempi di Utilizzo della Serie di Fourier . . . . .	188
24.6.1	Esempio 1 . . . . .	188
24.6.2	Esempio 2 . . . . .	191
<b>IV</b>	<b>APPENDICI</b>	<b>192</b>
<b>A</b>	<b>Assiomi Fondamentali dell'Analisi</b>	<b>194</b>
<b>B</b>	<b>Zeri di una funzione</b>	<b>195</b>
B.1	Criteri di Convergenza . . . . .	196
<b>C</b>	<b>Metodo di Routh-Hurwitz</b>	<b>198</b>
<b>D</b>	<b>Radici Reali dei Polinomi</b>	<b>203</b>
D.1	Ricerca dell'intervallo di esistenza delle Radici Reali con meto- do di Ruffini . . . . .	203
D.2	Ricerca delle Radici Reali con metodo della Successione di Sturm . . . . .	207
<b>E</b>	<b>Superfici Tridimensionali</b>	<b>211</b>

<b>F</b>	<b>Relazioni Vettoriali</b>	<b>216</b>
<b>G</b>	<b>La disuguaglianza di Bernoulli</b>	<b>217</b>
<b>H</b>	<b>Calcolo di: <math>\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx</math></b>	<b>223</b>
<b>I</b>	<b>Richiami di Algebra Lineare</b>	<b>225</b>
I.1	Definizioni e Teoremi . . . . .	225
I.2	Matrici Partizionate e Riducibili . . . . .	234
I.3	Norme . . . . .	236
I.3.1	Norme Vettoriali . . . . .	237
I.3.2	Norme Matriciali . . . . .	237
I.4	Sistemi di Equazioni Algebriche Lineari . . . . .	238
I.5	Calcolo della Matrice Inversa con il metodo di Gauss-Jordan	240
<b>J</b>	<b>Unità di Misura</b>	<b>244</b>
J.1	S.I. - Sistema Internazionale . . . . .	244
J.2	Lunghezza . . . . .	246
J.3	Massa . . . . .	248
J.4	Tempo . . . . .	252
J.5	Superficie . . . . .	253
J.6	Volume-Capacità . . . . .	254
J.7	Angoli . . . . .	258
J.8	Velocità . . . . .	259
J.9	Forza . . . . .	260
J.10	Pressione . . . . .	261
J.11	Potenza . . . . .	263
J.12	Energia . . . . .	264
J.13	Temperatura . . . . .	265
J.14	Elettricità e Magnetismo . . . . .	269
J.15	Onde Elettromagnetiche . . . . .	270
J.16	Multipli e sotto-multipli del S.I. . . . .	272
<b>K</b>	<b>Costanti Fondamentali della Fisica</b>	<b>273</b>
<b>L</b>	<b>Codice dei colori dei resistori</b>	<b>274</b>



**Parte I**

**Analisi Matematica I**

# Capitolo 1

## Derivate e Primitive

Qui di seguito, sono riportate le tabelle, relative al calcolo delle Derivate, e delle Primitive di uso più frequente:

Derivate di Funzioni Elementari	
Funzione	Derivata
$x^n (n \in \mathbb{R})$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{R})$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^x$	$e^x$
$a^x (a \in \mathbb{R})$	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x) (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbf{D})$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$g(h(x))$	$g'(h(x)) \cdot h'(x)$
$g(x) = f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$
$g^{h(x)}(x)$	$g^{h(x)}(x) \cdot [h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}]$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

Tabella 1.1: Derivate di Funzioni Elementari

<b>Primitive di Funzioni Elementari</b>	
<i>Funzione</i>	<i>Primitiva</i>
$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot x + K (K = \text{costante})$
$x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\tan(x)$	$-\ln  \cos(x) $
$a^x \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$g(x) \cdot h(x)$	$G(x)h(x) - \int_x (G(t) \cdot h'(t))dt$ (Integrazione per Parti)
$f(g(x)) \cdot g'(x)$	$\int^{g(x)} f$ (Integrazione per Sostituzione)
$g(x) \cdot g'(x)$	$\frac{1}{2}g^2(x)$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln g(x) $

Tabella 1.2: Primitive di Funzioni Elementari

## Capitolo 2

# Formule e Relazioni Generali

Quelle che seguono, sono relazioni il cui utilizzo è a discrezione dello studente; esse possono, per esempio, essere utilizzate, per il calcolo di un integrale, o per lo studio della convergenza di una serie:

(Disuguaglianza di Bernoulli) <sup>1</sup>

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-1, +\infty[ \quad (2.1)$$

(Per  $n \in \mathbb{R}$ , può non valere per:  $n \in ]0, 1[$ )

(Media Aritmetica)

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (2.2)$$

(Media Ponderata)

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + \dots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} \quad (2.3)$$

(Media Geometrica)

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (2.4)$$

(Relazioni tra Medie)

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Per i numeri Naturali, è sempre valida per  $x \geq -1$

(Composizione di Funzioni Inverse)

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) \Rightarrow (g(f(x)))^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x)) \quad (2.6)$$

(Binomio di Newton)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \quad (2.7)$$

(Binomiale n su k)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2.10)$$

$$\sum_{k=1}^n (a \cdot k^\alpha + b) = a \cdot \left( \sum_{k=1}^n k^\alpha \right) + n \cdot b \quad (2.11)$$

$$n!(n+1) = (n+1)! \quad (2.12)$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad (2.13)$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c) \quad (2.14)$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad (2.15)$$

$$\log_a(b)^c = c \cdot (\log_a b) \quad (2.16)$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (2.17)$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad (2.18)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (2.19)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (2.20)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (2.21)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \quad (2.22)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b + c) + 3b^2(a + c) + 3c^2(a + b) + 6abc \quad (2.23)$$

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi \cdot n} \quad (2.24)$$

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \quad (2.25)$$

$$(2n)!! = 2^n n! \quad (2.26)$$

(Definizione di Seno Iperbolico)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2.27)$$

(Definizione di Coseno Iperbolico)

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2.28)$$

(Definizione di Tangente Iperbolica)

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (2.29)$$

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (2.30)$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \quad (2.31)$$

$$y(x) = \frac{1}{k} \cosh(k \cdot x + h) + \beta \quad \textbf{(Catenaria)} \quad (2.32)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad (2.33)$$

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x \quad (2.34)$$

(Ordini di Infinito)

$$\ln(n) \ll n^\alpha \ll \lambda^n \ll n! \ll n^n \ll e^n \cdot n! \quad (2.35)$$

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \quad (2.36)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad (\text{Si ricordi che: } 0! = 1) \quad (2.37)$$

(Disuguaglianza Triangolare)

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (2.38)$$

$$|x + y| \geq ||x| - |y|| \quad (2.39)$$

$$(2n)! = n! \cdot \prod_{i=1}^n (n + i) \quad (2.40)$$

$$k^k n^{nk} \leq (n!)^{k+1} \quad \forall n \geq m \in \mathbb{N} \quad (2.41)$$

## Capitolo 3

# Formule Trigonometriche

Quelle che seguono sono le formule trigonometriche più usate, esse possono servire, per esempio, nella risoluzione di integrali:

### 3.1 Somma di Angoli

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha) \quad (3.1)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (3.2)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \quad (3.3)$$

Naturalmente, queste formule possono essere usate per ricavare, le formule di duplicazione ( $2\alpha = \alpha + \alpha$ ).

### 3.2 Formule di Bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \quad (3.4)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \quad (3.5)$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \quad (3.6)$$



### 3.3 Formule di Prostaferesi

$$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right) \quad (3.7)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (3.8)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (3.9)$$

$$\tan(\alpha) \pm \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} \quad (3.10)$$

### 3.4 Formule di Werner

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (3.11)$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (3.12)$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (3.13)$$

### 3.5 Formule Varie

$$\sin(x) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \quad \sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) \quad (3.14)$$

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \quad 1 - \cos(x) = 2 \sin^2(x/2) \quad (3.15)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} \quad (3.16)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \quad (3.17)$$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad (3.18)$$

$$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.19)$$

$$\text{con } \tan(\varphi) = \frac{B}{A} \quad C = \frac{A}{\cos(\varphi)} = \frac{B}{\sin(\varphi)} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = D \sin(\omega t + \psi) \quad (3.20)$$

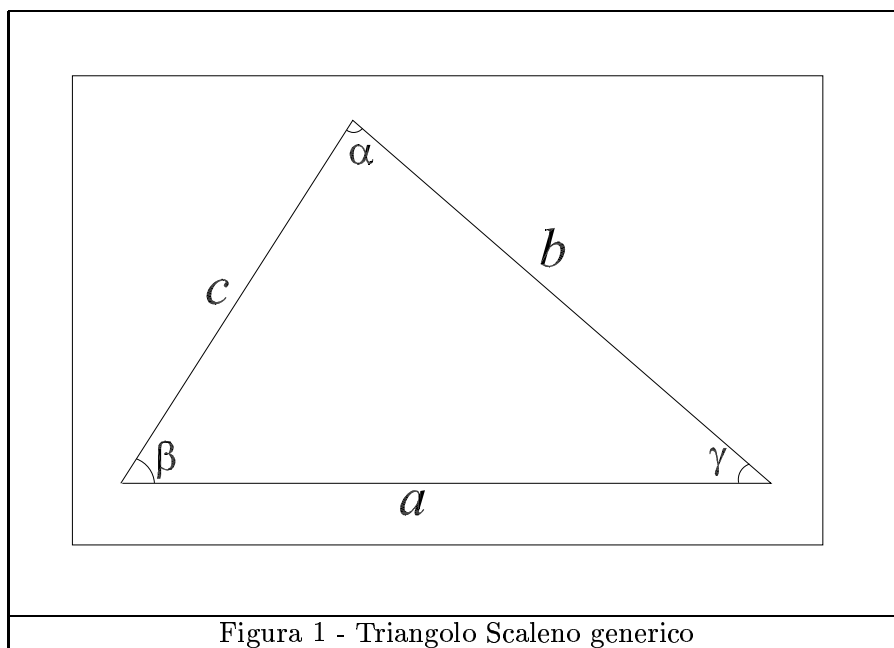
$$\text{con } \tan(\psi) = -\frac{A}{B} \quad D = \frac{B}{\cos(\psi)} = -\frac{A}{\sin(\psi)} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Teorema di Carnot

$$\begin{cases} a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \end{cases}$$

Teorema dei Seni

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\ \frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \\ \frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \end{cases}$$



## Capitolo 4

# Geometria Elementare

Qui di seguito, vengono riportate alcune equazioni di luoghi geometrici bidimensionali di uso frequente:

### 4.1 Circonferenza

C=Centro della circonferenza; r=Raggio Equazione:  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

### 4.2 Ellisse

a,b=Semiassi; e=Eccentricità

$$\text{Equazione: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

### 4.3 Iperbole

$$\text{Equazione: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$A = (a, 0), A' = (-a, 0) \text{ (Vertici dell'iperbole)} \quad y = \pm \frac{b}{a}x \text{ (Asintoti)}$$

## Capitolo 5

# Serie di Successioni

### 5.1 Teoremi

**Teorema 1 (Condizione necessaria alla Convergenza)** *Se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge, allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$*

**Teorema 2 (del Confronto)** *Siano  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  due serie di numeri reali.*

*Se esiste  $n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| \leq b_n, \forall n \geq n_0$  allora:*

1. *se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.*
2. *se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge.*

**Teorema 3 (Confronto Asintotico)** *Siano  $a_n, b_n$  due successioni a valori reali, tali che:*

1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$$

*allora le serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  hanno lo stesso carattere, (cioè, la convergenza o la divergenza dell'una, implica la divergenza o convergenza dell'altra).*

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

*allora:*

- *se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge.*
- *Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.*

**Teorema 4 (Criterio della Radice)** Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie a termini positivi ( $a_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ ). Supponiamo che esista il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}$$

Si hanno i seguenti casi:

- Se  $L < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.
- Se  $L > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge.
- Se  $L = 1$ , non si può affermare nulla.

**Teorema 5 (Criterio del Rapporto)** Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  una serie a termini positivi ( $a_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ ). Supponiamo che esista il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$$

Si hanno i seguenti casi:

- Se  $L < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.
- Se  $L > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge.
- Se  $L = 1$ , non si può affermare nulla.

**Teorema 6 (di Leibniz)** Sia  $a_n$  una successione a termini positivi ( $a_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ ), tale che  $a_n \geq a_{n+1}$  (successione decrescente); sia inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

**Teorema 7 (Convergenza Assoluta)** Se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

converge, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge.

## 5.2 Serie Notevoli

### 5.2.1 Serie Geometrica

Si definisce serie geometrica, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^k a^n = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} - 1 \quad \text{con } (a \in \mathbb{R}; a \neq 1)$$

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$$

si ha che:

- se  $|a| < 1$ , la serie converge a:  $\frac{a}{1-a}$ .
- Se  $a \geq 1$ , la serie diverge <sup>1</sup>.
- Se  $a < -1$ , la serie è indeterminata.

### 5.2.2 Serie Armonica

Si definisce, serie armonica, la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

si ha che:

- se  $\alpha \leq 1$ , la serie diverge.
- Se  $\alpha > 1$ , la serie converge.

### 5.2.3 Serie Varie

1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$$

- se  $\alpha > 1$ , la serie converge.
- Se  $\alpha \leq 1$ , la serie diverge.

2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Converge a 1

---

<sup>1</sup>Se  $a = 1$  la sommatoria è banalmente uguale a  $k$ , e la serie diverge.

# Capitolo 6

## Limiti

In questo capitolo, verranno trattati i limiti notevoli, ed alcuni teoremi relativi al calcolo dei limiti.

### 6.1 Limiti Notevoli

#### 6.1.1 Limiti di Successioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{2n}{n} = +\infty \quad (6.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{b_n} = e^{(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n})} \quad (6.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-a}{n+a}\right)^n = \frac{1}{e^{2a}} \quad (6.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (6.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2} \quad (6.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{n \cdot \ln(n)} = 1 \quad (6.6)$$

(Definizione del Numero di Nepero “e”)

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (6.7)$$

**6.1.2 Limiti di Funzioni**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (6.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \quad (6.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{se } \alpha > 0 \quad (6.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = 1/2 \quad (6.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (6.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (6.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x+1} = e \quad (6.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad (6.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \quad (6.16)$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

e se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = l$$

allora:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{g(x)} = e^l$$



## 6.2 Definizioni

**Definizione 1 (Limite di una Funzione Reale)** Data una funzione reale  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  (con  $D$ =dominio di  $f$ ), si definisce: limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende ad  $x_0$  (con  $x_0$  punto di accumulazione<sup>1</sup> per  $D$ ) il valore  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  tale che,  $\forall J(l), \exists I(x_0) : f(I \setminus \{x_0\}) \subseteq J$  cioè: “**per ogni intorno  $J$  di  $l$ , esiste un intorno  $I$  di  $x$  con zero, tale che l'immagine, tramite  $f$ , di  $I$  escluso  $x$  con zero, sia contenuto in  $J$ .**”

**Definizione 2 (Massimo e minimo Limite)** Sia  $f(x)$  una funzione reale definita in  $D \setminus \{x_0\}$ . Per ogni intorno  $V(x_0)$ , si ponga

$$m(V) = \inf_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x)$$

$$M(V) = \sup_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x)$$

Data la Sfera di centro  $x_0$  e raggio  $r$   $S(x_0, r)$ , si ha:

$$l = \lim_{r \rightarrow 0} m(S(x_0, r)) = \min \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (\text{minimo Limite}) \quad (6.17)$$

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} M(S(x_0, r)) = \max \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (\text{Massimo Limite}) \quad (6.18)$$

Da notare che questi limiti esistono sempre, in quanto esiste sempre l'estremo inferiore e l'estremo superiore di  $f(x)$ , potendo anche essere:

$$\inf_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x) = -\infty$$

$$\sup_{x \in V \setminus \{x_0\}} f(x) = +\infty$$

**Definizione 3 (Forme indeterminate)** Sono quelle forme, per cui non è possibile applicare direttamente i teoremi sulle operazioni con i limiti; esse sono:

$$+\infty - \infty; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{a}{0}$$

Relativamente a l'ultima relazione, essa è indeterminata nel caso in cui il denominatore tenda a zero senza che il suo segno sia definitivamente positivo o negativo.

---

<sup>1</sup>si ricordi che  $x_0$  è di accumulazione per  $D$ , se e solo se:  $\forall r > 0 : r \in \mathbb{R}$  si abbia  $\{]x_0 - r; x_0 + r[ \cap D \setminus \{x_0\}\} \neq \emptyset$

**Definizione 4 (Ordine di Infinitesimo)** Si dà la seguente definizione: se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

allora, si dice che  $g(x)$  ha ordine di infinitesimo maggiore di  $f(x)$ , e si indica con i seguenti simboli:

$g \circ (f)$  oppure  $g \ll f$ <sup>2</sup>

**Definizione 5 (Ordine di Infinito)** Si dà la seguente definizione: se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

allora, si dice che  $f(x)$  ha ordine di infinito maggiore di  $g(x)$ , e si indica con i seguenti simboli:

$f \bigcirc (g)$  oppure  $g \ll f$ .

---

<sup>2</sup>Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = l \in \mathbb{R}$  allora si dice che le due funzioni hanno lo stesso ordine di infinitesimo (infinito), e si scriverà:  $f \approx g$  oppure  $f \asymp g$ .

### 6.3 Teoremi

**Teorema 8 (Esistenza del Limite)** *Sia  $f$  una funzione, definita in tutti i punti di un intervallo  $]a, b[$ , tranne al più che in un punto  $x_0 \in ]a, b[$ . La funzione  $f(x)$  ha limite  $\lambda \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow x_0$ , se e solo se il limite destro e sinistro di  $f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ , esistono e coincidono entrambi con  $\lambda$ .*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

**Teorema 9 (Unicità del Limite)** *Il limite di una funzione reale (finito o infinito), se esiste è unico.*

**Teorema 10 (Monotonia del Limite o del confronto)** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali definite in un intorno di  $x_0$ , tranne al più che in  $x_0$ . Supponiamo che esista un intorno  $U(x_0)$  tale che:  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$ . Se*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \mu = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

*allora  $\lambda \leq \mu$ .*

**Teorema 11 (Permanenza del segno)** *Sia  $f(x)$  una funzione reale definita in un intorno di  $x_0$  tranne, al più che in  $x_0$ . Supponiamo che  $f(x)$  abbia limite  $\lambda \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow x_0$ . Se  $\lambda > 0$  ( $\lambda < 0$ ), allora esiste un intorno  $U(x_0)$  tale che  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ )  $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$*

**Teorema 12 (Operazioni con i limiti finiti)** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali definite in un intorno  $U(x_0)$  tranne al più che in  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , e due numeri reali  $\lambda$  e  $\mu$ . Supponiamo che esistano finiti i limiti di  $f(x)$  e  $g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ , cioè sia:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}$$

*Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda L + \mu M$$

**Teorema 13 (Criterio di Cauchy)** *Sia  $f(x)$  una funzione reale definita in un intorno di  $x_0$  tranne, al più che in  $x_0$ . La funzione  $f(x)$  ha limite finito per  $x \rightarrow x_0$ , se e solo se:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, |y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**Teorema 14 (del cambio di variabile)** *Sia  $f$  una funzione il cui dominio contenga un intorno  $U$  di  $x_0 \in \mathbb{R}$  tranne, al più  $x_0$ . Sia  $g$ , una funzione, il cui dominio contenga un intorno  $V$  di  $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  tranne<sup>3</sup>, al più  $t_0$ . Supponiamo che  $g(V) \subset U$ , e che  $g(t) \neq x_0 \forall t \neq t_0$  in  $V$ , e che:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = \lambda$$

**Teorema 15 (dei due carabinieri)** *Siano  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  il cui dominio contenga un intorno di  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , tranne al più il punto  $x_0$ . Supponiamo che esista un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$

- Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ .
- Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .
- Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ .

**Teorema 16 (Sostituzione degli Infinitesimi)** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = 0$$

e se  $g \circ (G)$  e  $f \circ (F)$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$$

**Teorema 17 (Sostituzione degli Infiniti)** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = +\infty$$

e se  $f \circ (F)$  e  $g \circ (G)$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

---

<sup>3</sup>Si ricordi che  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

## Capitolo 7

# Continuità

### 7.1 Definizioni

**Definizione 6 (di CONTINUITA')** Sia  $f$  una funzione reale di variabile reale, definita in un sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}$ ; si dirà che  $f$  è **CONTINUA** in  $x_0 \in D$ , se e solo se:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ; ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Definizione 7 (di Uniforme Continuità)** Si dice che  $f$  è Uniformemente continua in un insieme  $D$ , se e solo se:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x, y \in D, |x - y| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

**Definizione 8 (Funzione Lipschitziana)** Si dice che  $f$  è Lipschitziana in  $D$ , se esiste un numero  $L$  tale che:  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in D$ .

### 7.2 Teoremi

**Teorema 18 (Continuità e Lipschitzianità)** Ogni funzione lipschitziana in  $D$  è uniformemente continua in  $D$ ; ogni funzione uniformemente continua in  $D$ , è continua in  $D$ .

**Teorema 19 (Operazioni)** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali definite e continue in un punto  $x_0$ ; allora

1. La funzione  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$  è continua in  $x_0$ .
2. La Funzione  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$  è continua in  $x_0$ .
3. Se  $g(x_0) \neq 0$ , la funzione  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  è continua in  $x_0$

**Teorema 20 (Continuità delle funzioni composte)** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni tali che si possa considerare la loro composizione  $g \circ f$  in un insieme che contenga il punto  $x_0$ . Se  $f$  è continua in  $x_0$  e  $g$  è continua in  $y_0 = f(x_0)$ , allora  $g \circ f$  è continua in  $x_0$ .*

**Teorema 21 (di Weierstrass)** *Sia data una funzione reale, definita e continua in un sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}$ .*

*Allora in ogni intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  contenuto in  $D$ , la  $f$  assumerà valor Massimo e minimo, finiti; cioè:*

*$\exists p, q \in [a, b] : f(p) \leq f(x) \leq f(q), \forall x \in [a, b]$ .*

**Teorema 22 (Esistenza degli Zeri)** *Sia  $f$  una funzione definita e continua in un intervallo  $[a, b]$ , per cui  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ; allora  $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$ .*

**Teorema 23 (Continuità delle Funzioni Inverse)** *Sia  $f$  una funzione reale di variabile reale definita su un intervallo  $I$ . Se  $f$  è continua ed iniettiva, allora  $f^{-1}$  è continua su  $f(I)$ .*

**Teorema 24 (di Haine-Cantor)** *Sia  $f$  una funzione reale di variabile reale. Se  $f$  è continua su un sottoinsieme  $A$  del suo dominio, allora  $f$  è uniformemente continua su ogni intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  contenuto in  $A$ .*

## Capitolo 8

# La Derivata

### 8.1 Definizioni

**Definizione 9 (Rapporto Incrementale)** *Data una funzione  $f$ , per ogni coppia di punti distinti  $x, y$  appartenenti al suo dominio, si definisce rapporto incrementale di  $f$ , la relazione:*

$$R_f(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

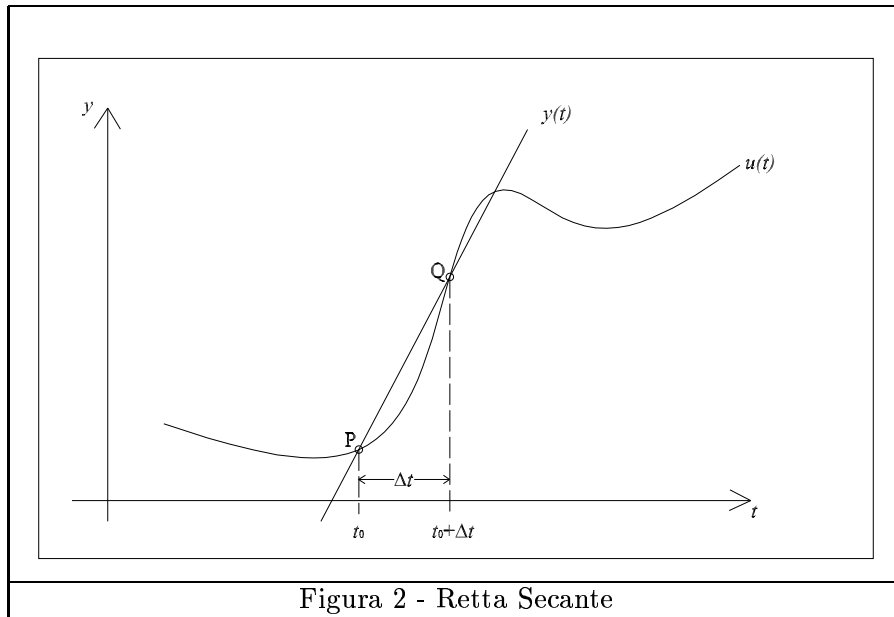
**Definizione 10 (di Derivata)** *Dato il rapporto incrementale  $R_f(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , si definisce derivata di  $f$  calcolata in  $x_0$ , il seguente limite:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x_0, x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Definizione 11 (Rappresentazioni della Derivata)** *Per rappresentare la derivata di  $f$ , esistono anche i seguenti simboli:*

$$\frac{df}{dx}(x_0) \quad Df(x_0) \quad \dot{f}(x_0)$$

**Concetto 1 (Interpretazione del Differenziale)** *Quella che segue, consiste nella interpretazione geometrica di uno dei concetti fondamentali dell'Analisi Matematica, per quanto concerne le funzioni reali di variabile reale. La stesura di tale concetto, verrà effettuata, a partire dal concetto di derivata.*



Sia  $u(t)$  una funzione reale di variabile reale, cioè  $(u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ . Sia  $y(t)$  la retta secante il grafico di  $u(t)$ , nei punti  $P$  e  $Q$ . Si voglia determinare l'equazione di tale retta, in funzione dei valori assunti da  $u(t)$ . La retta ha equazione generica  $y(t) = mt + q$  (dove  $m$  è il coefficiente angolare, e  $q$  è il termine noto della retta).

Ponendo la condizione che tale retta passi per  $P$  e  $Q$ ; si ha:

$$\begin{cases} u(t_0) &= mt_0 + q \\ u(t_0 + \Delta t) &= m(t_0 + \Delta t) + q \end{cases}$$

Risolviendo tale sistema (nelle incognite  $m$  e  $q$ ), si ha:

$$\begin{cases} m &= \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t} \\ q &= u(t_0) - \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t} \cdot t_0 \end{cases}$$

Facendo tendere a zero il valore dell'incremento  $(\Delta t)$ , si ha:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t} = u'(t_0)$$

e la retta secante "diviene tangente il grafico di  $u(t)$  nel punto  $t_0$ .

L'equazione della retta tangente, è quindi  $y(t) = u'(t_0) \cdot [t - t_0] + u(t_0)$ .



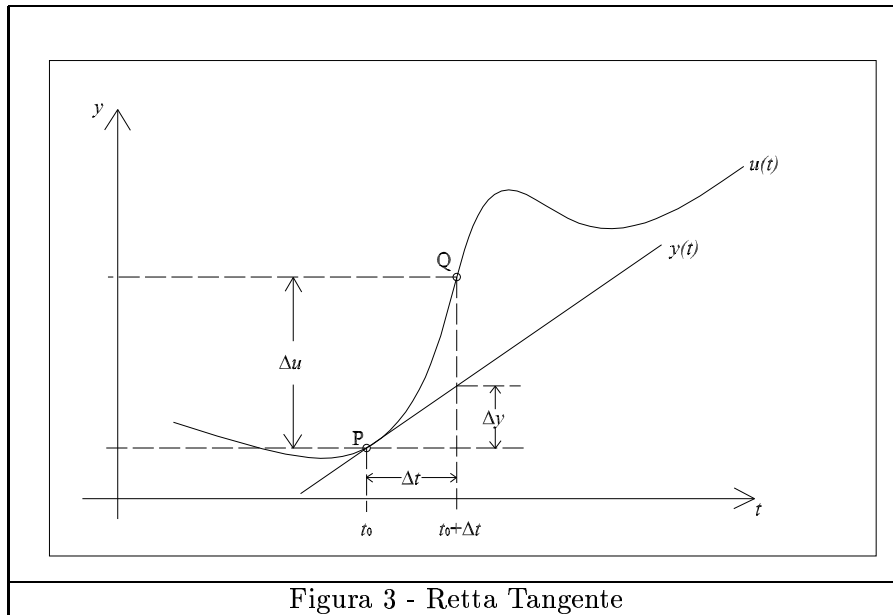


Figura 3 - Retta Tangente

Si denota con  $\Delta u$  l'incremento effettivo della funzione  $u(t)$ , e con  $\Delta y$  quello della funzione  $y(t)$  (retta). Si osserva che: per  $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta u \rightarrow \Delta y$ , ovvero che:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta u = \Delta y$$

Si calcola l'incremento della funzione  $y(t)$ :

per  $t = t_0 \Rightarrow y(t) = y(t_0) = u(t_0)$

per  $t = t_0 + \Delta t \Rightarrow y(t) = y(t_0 + \Delta t) = u'(t_0) \cdot \Delta t + u(t_0)$  e si ha che:  
 $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0) \Rightarrow \Delta y = u'(t_0) \cdot \Delta t$ ; questo è l'incremento che la funzione  $y(t)$  (retta tangente al grafico di  $u(t)$ ) subisce nel passaggio da  $t_0$  a  $t_0 + \Delta t$ , ed è valida  $\forall t_0 \in \mathbf{D}$  dove  $\mathbf{D}$  = Dominio di  $u(t)$ , e tale  $u'(t_0)$  esista. Quindi si può scrivere che

$$\Delta y = u'(t) \cdot \Delta t$$

questo termine prende il nome di **Differenziale della funzione**  $u(t)$ , e rappresenta l'incremento della funzione  $u(t)$  se essa avesse lo stesso comportamento della funzione  $y(t)$  (retta tangente).

Quindi il differenziale è di grande interesse matematico, in quanto permette di approssimare una qualsiasi funzione (Derivabile) in una funzione lineare, tale approssimazione è tanto più precisa, quanto più piccolo è l'incremento  $\Delta t$ . Le notazioni usate per indicare il Differenziale sono le seguenti:

$$du = u'(t) \cdot \Delta t$$

se calcoliamo il differenziale della variabile indipendente ( $t$ ), si ha:

$dt = \frac{dt}{dt} \cdot \Delta t = \Delta t$ , infatti la derivata di  $t$  vale 1; si conclude che il differenziale della variabile indipendente è uguale al suo incremento. Quindi il differenziale della funzione  $u(t)$  si può indicare con

$$du = u'(t) \cdot dt$$

che è la notazione più comune del differenziale.

Dalla definizione appena data, si comprende anche l'uso della notazione  $u'(t) = \frac{du}{dt}$  (cioè la derivata espressa come rapporto di differenziali).

Nell'approssimare l'incremento della funzione  $u(t)$  con quello della funzione  $y(t)$ , si commette un errore dato da:  $\sigma = \Delta u - \Delta y = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0) - u'(t) \cdot \Delta t$ . Si osserva che tale errore è infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\Delta t$ , infatti  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t} - u'(t_0) = u'(t_0) - u'(t_0) = 0$ .

Quindi l'incremento della funzione, può essere scritto come:  $\Delta u = \Delta y + \sigma \Rightarrow \Delta u = du + \sigma \Rightarrow \Delta u = u'(t) \cdot dt + \sigma$ . Ricordando che  $\sigma$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\Delta t$ , si ha che il differenziale rappresenta la parte **Lineare Principale** dell'incremento di una funzione.

## 8.2 Teoremi

**Teorema 25 (Condizione necessaria alla derivabilità)** Se  $f$  è derivabile nel punto  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$

**Teorema 26 (Regole di Derivazione)** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni, ambedue derivabili nel punto  $x_0$ , e sia  $k$  un numero reale costante. Si ha:

- $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$
- $(f \pm g)(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$  a condizione che  $g(x_0) \neq 0$

**Teorema 27 (valor medio di Lagrange)** Sia  $f$  una funzione definita e continua in un intervallo chiuso, e limitato  $[x_0, y_0]$ . Se  $f$  è derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto  $]x_0, y_0[$ , allora:

$$\exists \xi \in ]x_0, y_0[: R_f(x_0, y_0) = \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} = f'(\xi)$$

**Teorema 28 (di Rolle)** *Sia  $f$  una funzione continua nell'intervallo chiuso  $[x_0, y_0]$  e derivabile nell'intervallo aperto  $]x_0, y_0[$ . Se  $f(x_0) = f(y_0)$  allora*

$$\exists \xi \in ]x_0, y_0[: f'(\xi) = 0$$

*Quindi  $\xi$  è un Punto Stazionario.*<sup>1</sup>

Il seguente teorema è una generalizzazione del teorema del valor medio di Lagrange:

**Teorema 29 (di Cauchy)** *Siano  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , due funzioni continue sull'intervallo chiuso  $[x_0, y_0]$  e derivabili sull'intervallo aperto  $]x_0, y_0[$ . Se  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]x_0, y_0[$ , allora esiste un punto  $\xi \in ]x_0, y_0[$  tale che*

$$\frac{f(y_0) - f(x_0)}{g(y_0) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

**Teorema 30 (Derivabilità e Lipschitzianità)** *Sia  $f(x)$  una funzione ed  $I$  un qualunque intervallo contenuto nel suo dominio. Supponiamo che  $f(x)$  sia derivabile in ogni punto di  $I$ .*

*Allora  $f(x)$  è Lipschitziana su  $I$ , con costante di Lipschitz  $L$ , se e solo se  $f'(x)$  è limitata su  $I$  ed  $L \geq \sup_{x \in I} |f'(x)|$ .*

**Teorema 31 (Derivata e Monotonia)** *Sia  $f(x)$  una funzione ed  $I$  un qualunque intervallo contenuto nel suo dominio. Supponiamo che  $f(x)$  sia derivabile in ogni punto di  $I$ .*

*Allora  $f(x)$  è crescente (rispettivamente decrescente o costante) in  $I$ , se e solo se  $f'(x) \geq 0$  (risp.  $f'(x) \leq 0$  o  $f'(x) = 0$ )  $\forall x \in I$ .*

**Teorema 32 (di L'Hôpital)** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite e derivabili in ogni punto di un intervallo  $I$ ; supponiamo che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ (oppure } \pm \infty)$$

*Supponiamo, ancora, che  $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$ ; se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

---

<sup>1</sup>Si definisce Punto Stazionario un punto che annulli la derivata prima

## Capitolo 9

# Funzioni Reali

**Definizione 12 (di Funzione Reale)** Si definisce *Funzione Reale* di variabile reale, un'applicazione che, ad ogni numero reale  $x$ , associa uno ed un solo numero reale  $f(x)$ .

**Definizione 13 (Funzione Pari)** Una funzione reale di variabile reale, si definisce *pari*, quando è:

$$f(x) = f(-x)$$

Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate ( $y$ ), e si hanno i seguenti teoremi: date due funzioni pari,  $f(x)$  e  $g(x)$ , si ha:

- $F(x) = f(x) \pm g(x)$  è una funzione pari, cioè  $F(x) = F(-x)$
- $F(x) = f(x) \cdot g(x)$  è una funzione pari, cioè  $F(x) = F(-x)$
- $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  è una funzione pari, cioè  $F(x) = F(-x)$ , purché  $g(x) \neq 0, \forall x \in D$ , dove  $D = \text{Dominio di } g$ .

**Definizione 14 (Funzione Dispari)** Si definiscono *Funzioni dispari*, quelle funzioni reali di variabile reale, tali che:

$$f(x) = -f(-x)$$

Dal punto di vista grafico, esse sono simmetriche rispetto all'origine (quindi sono a simmetria centrale), ed hanno la seguente caratteristica; date due funzioni dispari,  $f(x)$  e  $g(x)$ , si ha:

- $F(x) = f(x) \pm g(x)$  è una funzione dispari, cioè  $F(x) = -F(-x)$
- $F(x) = f(x) \cdot g(x)$  è una funzione *PARI*, cioè  $F(x) = F(-x)$
- $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  è una funzione *PARI*, cioè  $F(x) = F(-x)$ , purché  $g(x) \neq 0, \forall x \in D$ , dove  $D = \text{Dominio di } g$ .

**Osservazione 1** data una qualsiasi funzione  $f(x)$ , essa si può esprimere come somma di una funzione pari e di una dispari:  $f(x) = g(x) + h(x)$  con

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

## 9.1 Studio di Funzioni Reali

Per lo studio di funzioni reali, di variabile reale, seguire i seguenti punti:

1. Determinare il Dominio (insieme di esistenza)  $A \subseteq \mathbb{R}$  di  $f$ .
2. Determinare l'insieme  $B \subseteq A$  in cui  $f$  è Continua.
3. Determinare, se è possibile, gli zeri di  $f$  in  $A$ .
4. Trovare gli intervalli di positività e negatività di  $f$  in  $A$ .
5. Determinare il  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  dove, il valore  $x_0$  è un punto di accumulazione <sup>1</sup> particolare per  $\mathbb{R}$  (per esempio un punto in cui  $f$  non sia definita).
6. Determinare gli intervalli in cui la funzione  $f(x)$  è crescente o decrescente. Per fare questo è necessario studiare la disequazione  $f'(x) \geq 0$  (e, di conseguenza, la  $f'(x) \leq 0$ ) <sup>2</sup>.
7. Determinare i punti di Massimo e di minimo relativi interni di  $f$  in  $B$ . Procedere nel seguente modo:
  - determinare  $f'(x)$ .
  - Risolvere l'equazione  $f'(x) = 0$  (siano  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  tali soluzioni <sup>3</sup>).
  - Determinare  $f''(x)$ , allora si ha che:
    - se  $f''(x_i) > 0$ , allora  $x_i$  è un punto di minimo per  $f$ .
    - Se  $f''(x_i) < 0$ , allora  $x_i$  è un punto di Massimo per  $f$ .

Oppure, senza determinare la derivata seconda di  $f$ , si proceda nel seguente modo:

  - se  $\forall \varepsilon > 0$  nell'intervallo  $]x_i - \varepsilon; x_i[$  si ha  $f'(x) < 0, (f'(x) > 0)$  e nell'intervallo  $]x_i; x_i + \varepsilon[$  si ha  $f'(x) > 0, (f'(x) < 0)$ ; allora  $x_i$  è un punto di minimo per  $f$  (allora  $x_i$  è un punto di massimo per  $f$ ).

8. Determinare gli eventuali Asintoti

---

<sup>1</sup>vedere la nota n.1, a pag. 24

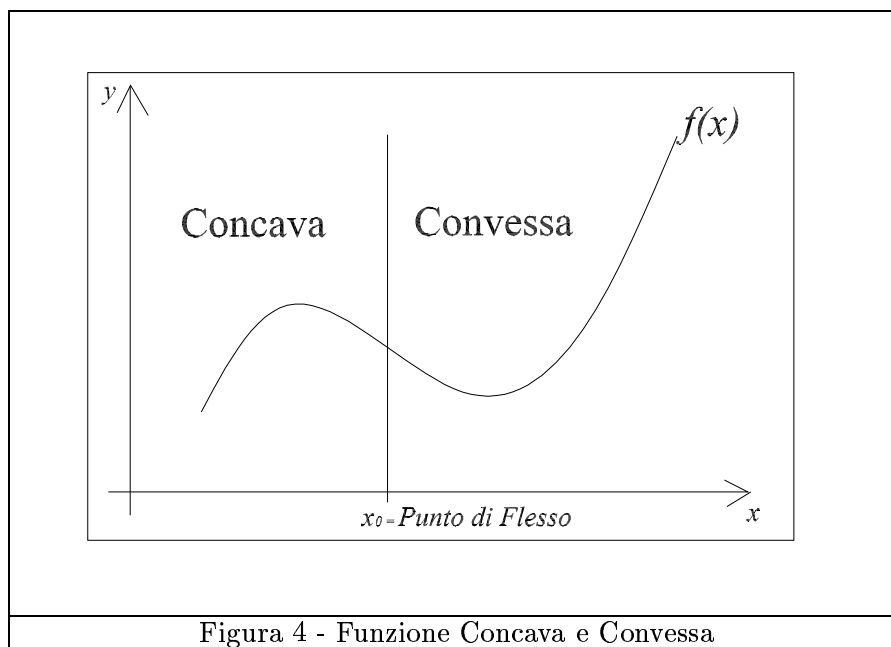
<sup>2</sup>Vedi Teorema n.31 pag. 34

<sup>3</sup>Si considerino soltanto le soluzioni Reali

- L'asintoto verticale ha equazione:  $x = x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ .
- L'asintoto obliquo ha equazione:  $y = mx + q$  (retta generica <sup>4</sup>), con  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ , e  $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$ , con  $m, q \in \mathbb{R}$ .

9. Determinare gli intervalli (I) in cui  $f(x)$  è concava o convessa.

- Se  $f \in C^2(B)$ , allora  $f$  è convessa se  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ .
- Se  $f \in C^2(B)$ , allora  $f$  è concava se  $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ .
- Se  $f''(x_0) = 0$ , e in un intorno di  $x_0$  la funzione passa da concava a convessa, allora il punto  $x_0$  si dice punto di flesso.



<sup>4</sup>se  $m = 0$  si ha l'asintoto orizzontale

## 9.2 Volumi di Solidi di Rotazione

1. Volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico di  $f(x)$  rispetto all'asse  $x$ , considerando l'intervallo  $[a, b]$ :

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

2. Volume del solido ottenuto con la rotazione del grafico di  $f(x)$  rispetto all'asse  $y$ , considerando l'intervallo  $[a, b]$ :

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

## 9.3 Lunghezza di un arco di curva

Lunghezza dell'arco di curva <sup>5</sup> di  $f(x)$  nell'intervallo  $[a, b]$ :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

---

<sup>5</sup>Per un approfondimento relativo a questo argomento, vedere il capitolo 'Geometria Differenziale' a pag 98

## Capitolo 10

# Formula, e sviluppi in serie di Taylor

La serie di Taylor, o più comunemente denominata Formula di Taylor, permette di approssimare una qualsiasi funzione reale, che sia derivabile  $k$  volte nel suo dominio ( $D$ ), in un intorno di un punto  $x_0$  appartenente al dominio stesso.

Il Polinomio di Taylor si indica con  $P_k(x)$ , e si ha:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{D^i f(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

dove, con la notazione  $D^i f(x_0)$ , si indica la derivata  $i$ -esima <sup>1</sup> di  $f$ , calcolata nel punto  $x_0$ .

### 10.1 Resto di Peano

Quando, in un intorno di  $x_0$ , si approssima la funzione  $f(x)$  con il polinomio di Taylor, si commette un errore dato da:

$$R_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} = 0$$

cioè, il resto è infinitesimo di ordine maggiore di  $k$ . Quindi si ha che:

$R_k(x) = o(x - x_0)^k$ , da cui deriva

$$f(x) = P_k(x; x_0) + o(x - x_0)^k.$$

---

<sup>1</sup>con la convenzione che  $D^0 f(x_0) = f(x_0)$



## 10.2 Resto di Lagrange

$$\forall x \in D, \exists \xi_x \in [x, x_0] : R_k(x) = \frac{D^{k+1}f(\xi_x)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

Si ha anche che:

$$R_k(x; x_0) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-t)^k f^{k+1}(t) dt$$

## 10.3 Alcuni Sviluppi in serie di Taylor

I seguenti sviluppi di Taylor, rappresentano alcune funzioni di uso comune, *calcolate in un intorno di  $x_0 = 0$ .*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (10.1)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (10.2)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (10.3)$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (10.4)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (10.5)$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (10.6)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (10.7)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (10.8)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad (10.9)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{19x^7}{315} + \circ(x^7) \quad (10.10)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{11x^7}{336} + \circ(x^7) \quad (10.11)$$

$$\arctan(1-x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{40} + \circ(x^5) \quad (10.12)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} + \circ(x^5) \quad (10.13)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \frac{7x^5}{256} + \circ(x^5) \quad (10.14)$$

## Capitolo 11

# Calcolo Integrale

### 11.1 Primitive di alcune funzioni

Le seguenti espressioni, costituiscono le primitive di funzioni (Integrali indefiniti) di uso frequente; si indicherà con  $c$  una costante numerica arbitraria.

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x - \sin(x) \cos(x)}{2} + c \quad (11.1)$$

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x + \sin(x) \cos(x)}{2} + c \quad (11.2)$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln |\tan(x/2)| + c \quad (11.3)$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln |1 + \tan^2(x/2)| + c \quad (11.4)$$

$$\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{4} \left( \sin^3(x) \cos(x) + \int \sin^2(x) dx \right) + c \quad (11.5)$$

$$\int \sin^4(x) dx = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) - \sin^3(x) \cos(x) \right) + c \quad (11.6)$$

$$\int \cos^4(x) dx = \frac{1}{8} (3x + 5 \sin(x) \cos(x) - 2 \sin^3(x) \cos(x)) + c \quad (11.7)$$

In generale, posto <sup>1</sup>:

$$I_n = \int \sin^n(x) dx$$

---

<sup>1</sup>Si ponga la convenzione:  $I_0 = x$

si ha:

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1}(x) \cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + c \quad (n \geq 2) \quad (11.8)$$

Posto

$$I_n = \int \cos^n(x) dx$$

si ha:

$$I_n = \frac{\cos^{n-1}(x) \sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + c \quad (n \geq 2) \quad (11.9)$$

Posto

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

si ha:

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + c \quad (n > 1) \quad (11.10)$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + c \quad (11.11)$$

$$\int x^n \ln(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c \quad (11.12)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right) + c \quad (11.13)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + d}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a(ax^2 + bx + d)} \right) + c \quad (\text{se } a > 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + d}} dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left( \frac{b + 2ax}{\sqrt{b^2 - 4ad}} \right) + c \quad (\text{se } a < 0)$$

## 11.2 Teoremi

**Teorema 33 (Integrabilità delle funzioni continue)** *Sia  $f$  una funzione reale di variabile reale, sia  $[a, b]$  (con  $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ ), un intervallo contenuto nel suo dominio. Se  $f$  è continua in  $[a, b]$ , allora  $f$  è integrabile in  $[a, b]$*

**Teorema 34 (Monotonia dell'Integrale)** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali di variabile reale, e sia  $[a, b]$  (con  $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ ), un intervallo contenuto nel dominio di entrambe. Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano integrabili in  $[a, b]$ . Se  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ , allora:*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

**Teorema 35 (Operazioni con gli Integrali)** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni reali di variabile reale, e sia  $[a, b]$  (con  $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ ), un intervallo contenuto nel dominio di entrambe. Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano integrabili in  $[a, b]$ , allora:*

- $f(x) \pm g(x)$  è integrabile in  $[a, b]$ , e si ha:

$$\int_a^b (f(t) \pm g(t))dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt$$

- Se  $k \in \mathbb{R}$ , allora  $k \cdot f(x)$  è integrabile in  $[a, b]$ , e si ha:

$$\int_a^b kf(t)dt = k \int_a^b f(t)dt$$

- $f(x) \cdot g(x)$  è integrabile in  $[a, b]$ .
- Se  $|g(x)| > 0 \forall x \in [a, b]$  allora  $\frac{f(t)}{g(t)}$  è integrabile in  $[a, b]$ .
- $|f(x)|$  è integrabile in  $[a, b]$ , e si ha:

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

**Teorema 36 (Additività dell'Integrale)** *Sia  $f$  una funzione reale di variabile reale, sia  $[a, c]$  (con  $a, c \in \mathbb{R}$ ) un intervallo contenuto nel suo dominio, sia  $b \in ]a, c[$ .*

*La funzione  $f$  è integrabile in  $[a, c]$  se e solo se è integrabile sia in  $[a, b]$  che in  $[b, c]$ . Inoltre, se  $f$  è integrabile in  $[a, c]$ , allora si ha:*

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

**Teorema 37 (fondamentale del Calcolo Integrale)** *Sia  $f$  una funzione reale di variabile reale, sia  $I$  un intervallo aperto contenuto nel suo dominio. Supponiamo che  $f$  sia continua in ogni punto di  $I$ . Fissiamo  $x_0 \in I$ , e definiamo, su  $I$ , la funzione integrale:*

$$g(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

*Allora  $g$  è una primitiva di  $f$  in  $I$ , ovvero  $g$  è derivabile in ogni punto di  $I$  e  $g'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$ .*

*Inoltre, se  $F$  è una primitiva di  $f$  in  $I$ , e se  $a$  e  $b$  sono due punti qualsiasi di  $I$ , si ha:*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

### 11.3 Primitive Particolari

Di seguito vengono riportate alcune funzioni, che pur essendo espresse in termini di funzioni elementari, e pur ammettendo primitiva, quest'ultima non è esprimibile mediante funzioni elementari:

$$f(x) = e^{x^2} \tag{11.14}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \tag{11.15}$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (\text{Vedi anche Appendice a pag. 223}) \tag{11.16}$$

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x} \tag{11.17}$$

$$f(x) = \sin(e^x) \tag{11.18}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \tag{11.19}$$

Quindi, nel caso in cui si presenti  $\int_a^b f(x)dx$ , dove  $f(x)$  è una delle precedenti funzioni, si sappia che tale integrale non è calcolabile mediante la differenza di primitive, in quanto non è possibile esprimere le primitive con funzioni elementari.

## 11.4 Sostituzione della variabile di integrazione

Qui di seguito vengono riportate alcune regole, per effettuare il cambio di variabile di integrazione, atte a facilitare il calcolo dell'integrale.

1. Dato l'integrale:

$$\int x^r (a + bx^s)^q dx \quad \text{con } r, s, q \in \mathbb{Q}$$

si ha che, la migliore sostituzione da effettuare è

- $x = t^N$  se  $q \in \mathbb{Z}$  dove  $N$  è il M.C.D.<sup>2</sup> dei denominatori di  $r$  ed  $s$ .
  - $a + bx^s = t^h$ , se  $\frac{r+1}{s} \in \mathbb{Z}$ , dove  $h$  è il denominatore di  $q$ .
  - $ax^{-s} + b = t^h$ , se  $\frac{r+1}{s} + q \in \mathbb{Z}$ .
2. Data una funzione integranda costituita da una qualsiasi relazione  $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$  dove  $r_1, r_2, \dots, r_n$  sono numeri razionali; la sostituzione migliore da effettuare, è la seguente:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$$

dove  $N$  è il m.c.m.<sup>3</sup> dei denominatori di  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

Esempio: data la funzione integranda  $\frac{2+\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$ , la sostituzione da apportare è  $x+1 = t^6$ .

3. Data una funzione integranda costituita da una qualsiasi relazione  $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ , la sostituzione migliore da effettuare è la seguente:
  - $ax^2+bx+c = a(x+t)^2 \Rightarrow x = \frac{at^2-c}{b-2at}$  (se  $a > 0$ )
  - $x = \frac{1}{2a} \left( \Delta \frac{1-t^2}{1+t^2} - b \right)$  con  $\Delta = \sqrt{b^2-4ac}$ ;  $t = \sqrt{\frac{\Delta-(2ax+b)}{\Delta+(2ax+b)}}$  (se  $a < 0$ ).

Esempio: data la funzione integranda  $\frac{\sqrt{2x-x^2}+x}{2-\sqrt{2x-x^2}}$ ; quindi  $a = -1, b = 2, c = 0, \Delta = 2$  si ha:  $x = 1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}$   $t = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

---

<sup>2</sup>Massimo Comun Divisore

<sup>3</sup>minimo comune multiplo

## 11.5 Primitive di Funzioni Razionali

Data una funzione razionale fratta  $\frac{P_j(x)}{Q_k(x)}$  (con  $j$ =grado di  $P(x)$ ,  $k$ =grado di  $Q(x)$ ) dove,  $P(x)$  e  $Q(x)$  sono polinomi in  $x$ ; per determinarne una primitiva, si procede nel seguente modo:

1. se  $j \geq k$  si esegue la divisione  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , ottenendo un quoziente  $S$ , ed un resto  $R$ , e ricordando che  $P = QS + R$ , si ha:  $\frac{P(x)}{Q(x)} = S + \frac{R(x)}{Q(x)}$ . Quindi si trasforma il rapporto iniziale fra polinomi, nella somma fra, il polinomio  $S(x)$ , e un rapporto in cui il denominatore ha grado maggiore del numeratore (infatti il resto di una divisione ha sempre grado inferiore al dividendo).
2. Se  $j < k$ , si procede nel seguente modo: si calcolano tutte le soluzioni di  $Q(x) = 0$ , supponiamo che tali soluzioni siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  ( $n$  soluzioni Reali) e  $\beta_1, \overline{\beta_1}, \beta_2, \overline{\beta_2}, \beta_3, \overline{\beta_3} \dots, \beta_m, \overline{\beta_m}$  ( $2m$  soluzioni complesse <sup>4</sup>) cioè  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\beta_i, \overline{\beta_i} \in \mathbb{C}$

Quindi la funzione fratta  $\frac{P_j(x)}{Q_k(x)}$ , può essere sostituita con la combinazione lineare delle seguenti funzioni:

- $p_i^1(x) = \frac{1}{x-\alpha_i}, \dots, p_i^{\mu_i}(x) = \frac{1}{(x-\alpha_i)^{\mu_i}}$  con  $(i = 1, 2, \dots, n)$ .
- $q_i^1(x) = \frac{1}{|x-\beta_i|^2}, \dots, q_i^{\mu_i}(x) = \frac{1}{|x-\beta_i|^{2\mu_i}}$  con  $(i = 1, 2, \dots, m)$
- $r_i^1(x) = \frac{x}{|x-\beta_i|^2}, \dots, r_i^{\mu_i}(x) = \frac{x}{|x-\beta_i|^{2\mu_i}}$  con  $(i = 1, 2, \dots, m)$

Indicando con  $A, B, C, \dots$ , i coefficienti della combinazione lineare, essi si devono ricavare successivamente, confrontando i due membri dell'equazione precedente. La quantità  $\mu_i$  rappresenta la molteplicità della  $i$ -esima soluzione dell'equazione  $Q(x) = 0$ .

### (Esempio)

$\frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$  quindi deve essere:

$$A(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)^2 = x+2$$

Risolvendo il sistema nelle incognite  $A, B, C$ , si ha:  $A = \frac{4}{3}; B = -\frac{1}{9}; C = \frac{1}{9}$ .

---

<sup>4</sup>Si ricordi che, se un'equazione ammette una soluzione complessa, allora ammette anche la soluzione complessa coniugata



## 11.6 Integrali Impropri

Si danno le seguenti definizioni di Integrale Improprio:

- sia  $f$  una funzione integrabile su  $]a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R} : a < b$  si ponga

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

Se esiste tale limite, esso prenderà il nome di integrale improprio, e si indicherà con:

$$\lambda = \int_a^b f(t) dt$$

Analogamente, si ha:

- dato l'intervallo  $[a, +\infty[$  con  $a \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si scriverà

$$\lambda = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

- Dato l'intervallo  $[a, b[$  con  $a, b \in \mathbb{R} : a < b$ , si ha

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$$

se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si scriverà

$$\lambda = \int_a^b f(t) dt$$

- Dato l'intervallo  $] -\infty, a]$  con  $a \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt$$

se  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si scriverà

$$\lambda = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

### 11.6.1 Esempi di Integrali Impropri

$$\int_0^1 \ln(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \ln(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} [t \ln(t) - t]_x^1 = -1 \quad (11.20)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} + 1 = 1 \quad (11.21)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (11.22)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (11.23)$$

## 11.7 Integrali e Serie

**Teorema 38 (Integrale e Convergenza)** *Sia  $f$  una funzione continua, definita in  $[1, +\infty[$  con  $f(x) \geq 0, \forall x \in [1, +\infty[$ , decrescente; allora*

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ esiste} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ converge.}$$

*infatti si ha:*

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq 1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

**Teorema 39 (Calcolo iterativo dell'Integrale)** *Per ogni funzione continua su un intervallo  $[a, b]$ , se si sceglie una suddivisione  $\sigma_N$  di  $[a, b]$  in  $n$  parti uguali, si ha:*

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

## Capitolo 12

# Numeri Complessi

Sia  $i$  l'unità immaginaria  $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$ . Si definisce, numero complesso, la coppia ordinata di numeri reali  $z = (x, y)$ , dove la  $x$  prende il nome di parte reale del numero complesso, mentre  $y$  è la parte immaginaria. Secondo questa definizione, si ha  $i = (0, 1)$ .

### 12.1 Operazioni con i numeri Complessi

- **SOMMA:** dati due numeri complessi  $(x_1; y_1)$  e  $(x_2; y_2)$ , si ha:  
 $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ .
- **PRODOTTO:** dati due numeri complessi  $(x_1; y_1)$  e  $(x_2; y_2)$ , si ha:  
 $(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$  In base alla definizione delle operazioni, si osserva che:  $i^2 = i \cdot i = (0; 1)(0; 1) = (-1; 0) = -1$  e che  $(x; y) = z = (x; 0) + (0; 1)(y; 0) = x + iy$ .
- **COMPLESSO CONIUGATO.** Dato un numero complesso  $z_1 = x_1 + iy_1$ , si definisce *complesso coniugato* di  $z_1$ , il numero complesso  $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$  ottenuto cambiando di segno la parte immaginaria.
- **MODULO** di  $z$ :  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- **PARTE REALE** di  $z$ :  $\Re(z) = x$ .
- **PARTE IMMAGINARIA** di  $z$ :  $\Im(z) = y$
- **ARGOMENTO** di  $z$ :

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{per } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{per } x = 0; y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{per } x = 0; y < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{per } x < 0; y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{per } x < 0; y < 0 \end{cases}$$

- INVERSO di  $z$ :  $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$
- ESPONENZIALE Complesso:  $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$   
 Se si usa la convenzione  $\rho = |z|$  e  $\theta = \arg(z)$ , si ha:  
 $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ , o equivalentemente  $z = \rho e^{i\theta}$  dove si è usata la  
 notazione Euleriana  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ .
- POTENZA di numeri complessi:  
 $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ .

### 12.1.1 Formule di Eulero

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (12.1)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (12.2)$$

**Parte II**

**Analisi Matematica II**

## Capitolo 13

# Funzioni di “n” Variabili

**Definizione 15 (Funzione Scalare)**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . E' una funzione a valori reali, cioè al variare delle “n” variabili reali, indipendenti  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , si hanno valori reali  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ . Se si pone  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , la funzione scalare si indica, in forma compatta, con:  $f(\underline{x})$ .

**Definizione 16 (Funzione Vettoriale)**  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . E' una funzione a valori in  $\mathbb{R}^k$  (quindi è un vettore k-dimensionale); viene definita nel seguente modo:

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Dove ciascuna componente  $f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  (con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ), è una funzione scalare  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Si osservi che:  $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x}), \dots, f_k(\underline{x}))$

### 13.1 Definizioni Importanti

**Definizione 17 (DISTANZA)** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , si definisce Distanza in  $A$  una qualunque funzione  $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ , che soddisfi le seguenti condizioni:

- i)  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ , si ha  $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$ ; e  $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$
- ii)  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ , si ha  $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$  Proprietà Simmetrica
- iii)  $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in A$ , si ha  $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$  Dis. Triangolare

**Distanza Euclidea** Fra le infinite distanze che caratterizzano  $A$ , si definisce Distanza Euclidea, la funzione  $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$  (Norma del vettore differenza).

**Definizione 18 (Sfera)** Si definisce Sfera di centro  $\underline{x}_0$  e raggio  $r$ , e si indica col simbolo  $S(\underline{x}_0, r)$ , il seguente insieme:

- i)  $S(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}_0, \underline{x}) < r\}$  (**Sfera Aperta**)
- ii)  $S(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}_0, \underline{x}) \leq r\}$  (**Sfera Chiusa**)

La sfera viene anche denominata “Intorno Circolare”, e la sua forma geometrica non è necessariamente tonda, ma dipende dalla particolare distanza utilizzata; se tale distanza è quella Euclidea, allora la forma della sfera è tonda.

**Definizione 19 (Punto di Accumulazione)** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , il punto  $\underline{x}_0 \in A$  è di accumulazione per  $A$ , se e solo se  $\forall S(\underline{x}_0, r)$  si ha:  $S(\underline{x}_0, r) \cap \{A \setminus \{\underline{x}_0\}\} \neq \emptyset$ .

L'insieme di tutti i punti di accumulazione di  $A$ , viene indicato con  $\partial(A)$ , e denominato: Derivato di  $A$ .

**Definizione 20 (Intorno)** Un insieme  $I \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice “Intorno” di  $\underline{x}_0$ , se e solo se:

- i)  $\underline{x}_0 \in I$
- ii)  $\exists r > 0 : S(\underline{x}_0, r) \subseteq I$

**Osservazione 2** le Sfere sono intorni di ogni loro punto. Ogni Teorema valido per gli Intorni Circolari (Sfere), è, quindi, valido per qualsiasi Intorno.

## 13.2 Limiti di Funzioni di n variabili

### 13.2.1 Definizioni

**Definizione 21 (di Limite)** Data la funzione vettoriale  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , il cui dominio sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\underline{x}_0$  un punto di accumulazione per  $D$ . Si dirà che il vettore  $\underline{l} \in \mathbb{R}^k$ , è il limite di  $\underline{f}$  per  $\underline{x}$  che tende ad  $\underline{x}_0$ , e si scriverà:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$$

se e solo se  $\forall J(\underline{l}) \exists I(\underline{x}_0) : \underline{f}(I \setminus \{\underline{x}_0\}) \subseteq J$ ; cioè “per ogni intorno  $J$  di  $\underline{l}$ , esiste un intorno  $I$  di  $\underline{x}_0$ , tale che l’immagine tramite  $\underline{f}$  di  $I \setminus \{\underline{x}_0\}$ , sia interamente contenuta in  $J$ ”.

**Definizione 22 (Singolarità Eliminabile)** Sia  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $\underline{x}_0 \in \partial(D)$  un punto in cui  $\underline{f}$  non è definita. Diremo che  $\underline{x}_0 \in \partial(D)$  è un punto di Singolarità Eliminabile, se esiste finito il

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$$

### 13.2.2 Teoremi

**Corollario 1 (Limite delle Componenti)** Data una funzione  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ; definita nel seguente modo:

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ f_3(\underline{x}) \\ \dots \\ f_k(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Dire che  $\exists \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$ , equivale a dire che, posto  $\underline{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \dots \\ l_k \end{pmatrix}$ , si ha

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_1(\underline{x}) = l_1$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_2(\underline{x}) = l_2$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_3(\underline{x}) = l_3$$

...

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_k(\underline{x}) = l_k$$

Dove le funzioni  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$  sono funzioni reali, cioè  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; quindi risolvere o dimostrare che  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$ , significa risolvere o dimostrare  $k$  limiti di funzioni Reali.



**Teorema 40 (delle Operazioni)** Siano  $\underline{f}, \underline{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , due funzioni definite in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\underline{x}_0$  un punto di accumulazione per  $D$ , siano inoltre  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ; se

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}_1 \quad e \quad \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{g}(\underline{x}) = \underline{l}_2$$

allora si ha:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} (\lambda \underline{f}(\underline{x}) + \mu \underline{g}(\underline{x})) = \lambda \underline{l}_1 + \mu \underline{l}_2$$

**Teorema 41 (delle Funzioni Limitate)** Siano  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , due funzioni definite in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\underline{x}_0$  un punto di accumulazione per  $D$ ; se

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = 0$$

e  $g$  è limitata in  $D$ , allora

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x}) = 0$$

**Teorema 42 (Unicità del Limite)** Sia  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  il cui dominio sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\underline{x}_0$  un punto di accumulazione per  $D$ ; se

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}_1 \quad e \quad \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}_2$$

allora, necessariamente, deve essere  $\underline{l}_1 = \underline{l}_2$ .

**Teorema 43 (delle Restrizioni)** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $A \subseteq D$ ; sia pure  $\underline{x}_0$  un punto d'accumulazione per  $A$ . Allora, se  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$ , deve necessariamente essere

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}|_A(\underline{x}) = \underline{l}$$

dove, con la notazione  $\underline{f}|_A$ , s'intende la restrizione di  $f$  effettuata in  $A$ .

N.B. non è valido il teorema contrario; cioè se  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}|_A(\underline{x}) = \underline{l}$ , NON E' DETTO che  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$

Come si vedrà più avanti, la seguente osservazione è di grande importanza pratica per la risoluzione dei limiti in più variabili.

**Osservazione 3 (IMPORTANTE)** Il precedente teorema può essere utilizzato nel seguente modo: si trova il limite di una restrizione particolare di  $\underline{f}$ , sia  $\underline{l}$  tale limite. Allora il limite di  $\underline{f}$  su  $D$ , o è  $\underline{l}$ , oppure non esiste.

**Teorema 44 (Numero finito di Restrizioni)** Sia  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e siano  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  un numero finito di restrizioni di  $D$ , tali che  $\bigcup_{i=1}^m A_i = D \setminus \{\underline{x}_0\}$  e  $\underline{x}_0 \in \bigcap_{i=1}^m \partial(A_i)$ ; allora:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}|_{A_i}(\underline{x}) = \underline{l} \quad (\forall i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad \Rightarrow \quad \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$$

N.B. Il teorema è valido soltanto nel caso in cui  $D$  abbia un numero finito di restrizioni, e non vale se  $D$  ne ha un numero infinito.

**Teorema 45 (Cambio di Variabile)** Sia  $\underline{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  ed  $\underline{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^h$ , e siano  $D$  il campo di definizione di  $\underline{f}(\underline{g}(\underline{x}))$ , e  $D_1$  quello di  $\underline{f}(\underline{y})$ . Sia  $\underline{x}_0 \in \partial(D)$  t.c.  $\underline{y}_0 = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{g}(\underline{x})$  con  $\underline{y}_0 \in \partial(D_1)$ ; sia  $\underline{f}$  continua in  $\underline{y}_0$ , allora:

$$\lim_{\underline{y} \rightarrow \underline{y}_0} \underline{f}(\underline{y}) = \underline{l} \Rightarrow \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{g}(\underline{x})) = \underline{l}$$

**Teorema 46 (del Confronto)** Siano  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definite in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\underline{x}_0 \in \partial(D)$ . Se esiste un intorno  $I$  di  $\underline{x}_0$ , tale che  $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$   $\forall \underline{x} \in I \cap D$ , allora, se esistono i limiti delle funzioni  $f$  e  $g$ , si ha:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l_1; \quad \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} g(\underline{x}) = l_2 \Rightarrow l_1 \leq l_2$$

**Teorema 47 (dei due Carabinieri)** Siano date tre funzioni  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definite in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\underline{x}_0 \in \partial(D)$ . Sia  $I$  un intorno di  $\underline{x}_0$ , in cui  $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \leq h(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in I$ . Se

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} h(\underline{x}) = l$$

allora :

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} g(\underline{x}) = l$$

### 13.3 Metodo di risoluzione dei Limiti, per passaggio a Coordinate Polari

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ; in alcuni casi è utile rappresentare le variabili  $x$  ed  $y$ , in coordinate polari, ponendo:

$$\begin{cases} x = x(\rho, \theta) = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y(\rho, \theta) = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Si indichi con  $\tilde{f}(\rho, \theta)$  la funzione ottenuta, sostituendo, al posto di  $x$  ed  $y$ , le corrispondenti espressioni in coordinate polari suddette.

Se si riesce a maggiorare la funzione  $|\tilde{f}(\rho, \theta) - l|$  con una funzione che dipenda SOLTANTO da  $\rho$  (sia  $\varphi(\rho)$  tale funzione maggiorante); cioè, se si riesce a porre:

$$|\tilde{f}(\rho, \theta) - l| \leq \varphi(\rho)$$

e se si ha che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \varphi(\rho) = 0$$

allora si può affermare che

$$\lim_{\substack{(x) \rightarrow (x_0) \\ (y) \rightarrow (y_0)}} f(x, y) = l$$

### 13.4 Punti chiave per il calcolo di un Limite

1. Il primo passo da effettuare per calcolare un limite, è trovare il campo di definizione della funzione in esame  $f(\underline{x})$ , sia  $D$  tale insieme.
2. Calcolare il limite di  $f(\underline{x})$ , in una particolare restrizione  $A \subseteq D$ , scelta in maniera da semplificare tale calcolo. Il limite così calcolato, NON è il limite di  $f(\underline{x})$  in  $D$ , ma un “candidato” limite, cioè, il limite o è quello trovato, oppure non esiste (**applicazione dell’osservazione 3**).
3. Se non si riesce a trovare una restrizione adeguata, per dimostrare che il limite non esiste (trovando due restrizioni con limite differente), è probabile che il limite, invece, esista, e sia proprio quello trovato nella restrizione  $A$ ; quindi si proceda con l’utilizzo dei teoremi sui limiti, o con il metodo del passaggio a coordinate polari.

## 13.5 Continuità

### 13.5.1 Definizioni

**Definizione 23 (Funzione Continua)** Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , è continua in  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , se e solo se  $\underline{x}_0$  è un punto isolato<sup>1</sup> di  $D$ , oppure se  $\underline{x}_0 \in \partial(D)$ , e si ha che:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

### 13.5.2 Teoremi

**Teorema 48 (Continuità delle Componenti)** Sia  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , definita nel modo seguente:  $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x}), \dots, f_k(\underline{x}))$  dove le  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ; allora  $\underline{f}(\underline{x})$  è continua in  $\underline{x}_0$  se e solo se sono continue tutte le sue “k” componenti.  
Ciò deriva dal fatto che:

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l} \Leftrightarrow \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f_i(\underline{x}) = l_i$$

con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  ed  $\underline{l} = (l_1, l_2, l_3, \dots, l_k)$

**Teorema 49 (di Weierstrass)** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita e continua in un insieme chiuso e limitato  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , allora  $f$  ammette Massimo e minimo finiti, in  $K$ ; cioè

$$\exists \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K : f(\underline{x}_1) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_2) \quad \forall \underline{x} \in K$$

**Osservazione 4** Continuano ad essere validi i teoremi sulla continuità (visti a suo tempo per le funzioni reali di variabile reale), con le dovute modifiche, per ciò che concerne la variabile indipendente!

---

<sup>1</sup> $\underline{x}_0$  è un Punto Isolato per  $D$ , se e solo se  $\exists r > 0 : S(\underline{x}_0, r) \cap D = \{\underline{x}_0\}$

## 13.6 Derivabilità

### 13.6.1 Definizioni

**Definizione 24 (Derivata lungo una direzione)** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definita in un insieme  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , allora  $f$  è derivabile in  $\underline{x}_0 \in D$  nella direzione  $\underline{v}$  (dove  $\underline{v}$  è tale che  $\|\underline{v}\| = 1$ )<sup>2</sup>, se esiste finito il

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}$$

il limite si chiama “derivata” di  $f$  in  $\underline{x}_0$ , lungo la direzione  $\underline{v}$ , e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) \triangleq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \quad (13.1)$$

**Definizione 25 (Derivata Parziale)** Con riferimento alla definizione precedente, se si prende  $\underline{v} = \underline{e}_i$  (cioè uno dei vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ), la derivata, prenderà il nome di “derivata parziale”, e si indicherà con uno dei seguenti simboli:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0); \quad D_i f(\underline{x}_0); \quad f_{x_i}(\underline{x}_0)$$

**Definizione 26 (Gradiente)** Si definisce Gradiente di  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il seguente vettore:

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right)$$

O, in forma più compatta:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Da notare che  $\nabla f(\underline{x}_0)$  è un vettore  $n$ -dimensionale, il simbolo  $\nabla$  si legge “Nabla”.

---

<sup>2</sup> $\underline{v}$  è un versore

**Definizione 27 (Matrice Jacobiana)** Data una Funzione vettoriale  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , che ammetta derivate parziali in un punto  $\underline{x}_0$ ; si definisce Matrice Jacobiana calcolata in  $\underline{x}_0$ , la seguente matrice:

$$J_{\underline{f}}(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \frac{\partial f_k}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(dove le derivate parziali sono calcolate tutte in  $\underline{x}_0$ ) Si osservi che, la  $i$ -esima riga di tale matrice, non è altro che il gradiente della  $i$ -esima componente di  $\underline{f}$ ; cioè  $\nabla f_i(\underline{x}_0)$ .

**Definizione 28 (Derivata di ordine superiore)** Se  $f$  è derivabile in un punto  $\underline{x}_0$ , e le derivate, sono a loro volta derivabili nello stesso punto, allora si possono calcolare le “derivate delle derivate”, denominate derivate seconde.

La derivazione di funzioni a più variabili, non è così semplice come quella delle funzioni reali di variabile reale; ciò è dovuto alla presenza di più variabili (naturalmente), ma soprattutto al fatto che, in generale, bisogna tenere conto dell'ordine di derivazione.

## Notazione Derivata Seconda

Sia data la funzione  $f(x, y)$ ; in generale esistono 4 differenti derivate seconde, e sono:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  “derivata 2 volte rispetto ad  $x$ ”
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  “derivata 2 volte rispetto ad  $y$ ”
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  “derivata prima rispetto ad  $x$  e dopo rispetto ad  $y$ ”
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  “derivata prima rispetto ad  $y$  e dopo rispetto ad  $x$ ”
- Altre notazioni sono:  $D_x D_y f = D_{xy} f = f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Si tenga presente che una funzione di  $n$  variabili, ha potenzialmente  $n$  derivate prime,  $n^2$  derivate seconde,  $n^3$  derivate terze, e così via.

**Definizione 29 (Matrice Hessiana)** *Data una funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ), di classe  $C^2$  in  $D$ ; si definisce matrice Hessiana calcolata in  $\underline{x}_0 \in D$ , la seguente matrice:*

$$H_f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(dove le derivate parziali sono calcolate tutte in  $\underline{x}_0$ )

**Da notare che, se  $f$  soddisfa il teorema di Schwartz<sup>3</sup>, allora tale Matrice è Simmetrica.**

**Osservazione 5** *La derivabilità di una funzione di più variabili, non implica niente, cioè una funzione potrebbe ammettere derivate parziali in un punto  $\underline{x}_0$ , o derivata lungo ogni direzione in  $\underline{x}_0$ , ma non essere neanche continua in  $\underline{x}_0$ !*

*Per questo, si dice che, la derivata parziale non è l'estensione del concetto di derivata per le funzioni reali di variabile reale.*

---

<sup>3</sup>Vedi Teorema n.50, pag. 63

### 13.6.2 Teoremi

**Teorema 50 (Invarianza dell'ordine di Derivazione (di Schwartz))**

*Si darà la definizione del teorema, per funzioni in 2 variabili, anche se esso resta valido per funzioni di  $n$  variabili.*

*Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , e sia  $\underline{x}_0$  un punto di  $D$ , se le derivate parziali miste  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  esistono in un intorno  $I$  di  $\underline{x}_0$ , e sono continue in  $\underline{x}_0$ ; allora le due derivate miste coincidono, cioè si avrà:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

*(Quindi non sarà importante l'ordine di derivazione).*

## Notazione Derivata di Ordine Superiore

Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione per la quale sia valido il teorema di Schwartz, la derivata di ordine  $p$  di tale funzione verrà indicata con la seguente notazione:

$$D^p f = \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3} \dots \partial x_n^{p_n}} \quad (13.2)$$

Dove  $p_i$  indica<sup>4</sup>, quante volte si è effettuata la derivazione rispetto ad  $x_i$ .

**Teorema 51 (Derivabilità delle funzioni vettoriali)** *Data una funzione vettoriale  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , essa si dirà derivabile in  $\underline{x}_0$  nella direzione  $\underline{v}$ , se e solo se sono derivabili tutte le  $k$  componenti di  $\underline{f}$ .*

---

<sup>4</sup>Si noti che  $p = \sum_{i=1}^n p_i$



## 13.7 Differenziabilità

### 13.7.1 Definizioni

**Definizione 30 (Differenziabilità delle funzioni scalari)** Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice differenziabile in un punto  $\underline{x}_0$ , se esiste una funzione Lineare  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (dipendente da  $\underline{x}_0$ ) tale che

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - L(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0$$

Se  $f$  è differenziabile in ogni punto del suo dominio ( $D$ ), allora si dice che  $f$  è differenziabile in  $D$ , e la funzione lineare  $L$  prende il nome di “Differenziale” di  $f$  in  $\underline{x}_0$ .

### Notazioni

- Differenziale Parziale:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \cdot dx_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (13.3)$

- Differenziale Totale:  $df(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \cdot dx_i \quad (13.4)$

- Differenziale lungo una direzione  $\underline{v}$ :

$$df(\underline{x}_0)(\underline{v}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = (\nabla f(\underline{x}_0)) \cdot \underline{v} \quad (\text{Prodotto Scalare}) \quad (13.5)$$

### 13.7.2 Teoremi

**Teorema 52 (Condizione necessaria alla Differenziabilità)** Se una funzione è differenziabile in un punto  $\underline{x}_0$ , allora è continua in  $\underline{x}_0$

**Teorema 53 (Derivabilità delle Funzioni Differenziabili)** Se una funzione è differenziabile in un punto  $\underline{x}_0$ , allora è derivabile lungo ogni direzione, in  $\underline{x}_0$ ; e, di conseguenza, ammette derivate parziali in  $\underline{x}_0$ .

**Osservazione 6** Da questi teoremi, si deduce che la Differenziabilità di una funzione, è l'estensione formale del concetto di derivabilità, visto per le funzioni reali di variabile reale.

**Teorema 54 (Calcolo della Derivata)** Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , è differenziabile<sup>5</sup> in  $\underline{x}_0$ , allora, si ha che, la derivata di  $f$  lungo la direzione  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ , è data da:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \quad (\text{"\cdot" = Prodotto Scalare})$$

**Teorema 55 (Condizione sufficiente alla Differenziabilità)** Sia  $f$  una funzione che ammetta derivate parziali in un intorno  $I$  di  $\underline{x}_0$ ; se tali derivate parziali sono continue in  $\underline{x}_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$   
 { quindi per vedere se una funzione è differenziabile è sufficiente (ma non necessario) verificare che  $f \in C^1$  in  $\underline{x}_0$  }

**Teorema 56 (Differenziabilità delle funzioni vettoriali)** Data una funzione vettoriale  $\underline{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , essa si dirà differenziabile in  $\underline{x}_0$ , se e solo se, sono differenziabili tutte le  $k$  componenti di  $\underline{f}$ .

**Teorema 57 (Differenziabilità delle funzioni composte)** Siano  $\underline{f}$  e  $\underline{g}$  due funzioni per le quali si possa considerare la loro composizione; cioè: siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\underline{x}_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Sia  $\underline{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , differenziabile in  $\underline{x}_0$ , tale che il punto  $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$  sia di accumulazione per  $B$  e  $\underline{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenziabile in  $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$ . Sia  $\underline{f}$  differenziabile in  $\underline{x}_0$ , e  $\underline{g}$  differenziabile in  $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$ ; allora la funzione  $\underline{F} = \underline{g} \circ \underline{f}$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ , e si ha:

$$d\underline{F}(\underline{x}_0) = d\underline{g}(\underline{y}_0) \circ d\underline{f}(\underline{x}_0) \quad (\text{Composizione dei Differenziali})$$

o, equivalentemente:

$$J_{\underline{F}}(\underline{x}_0) = J_{\underline{g}}(\underline{y}_0) \cdot J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)$$

(Prodotto riga-colonna delle matrici jacobiane)

Per calcolare la derivata della  $i$ -esima componente di  $\underline{F}$ , rispetto alla  $j$ -esima variabile; si può adottare la seguente formula.

Si denotano con  $\underline{x}$  le variabili in  $\mathbb{R}^n$  e con  $\underline{y}$  le variabili in  $\mathbb{R}^m$ , e poniamo che la  $i$ -esima componente di  $\underline{F}$  sia la funzione  $F_i(\underline{x})$ . Si ha:

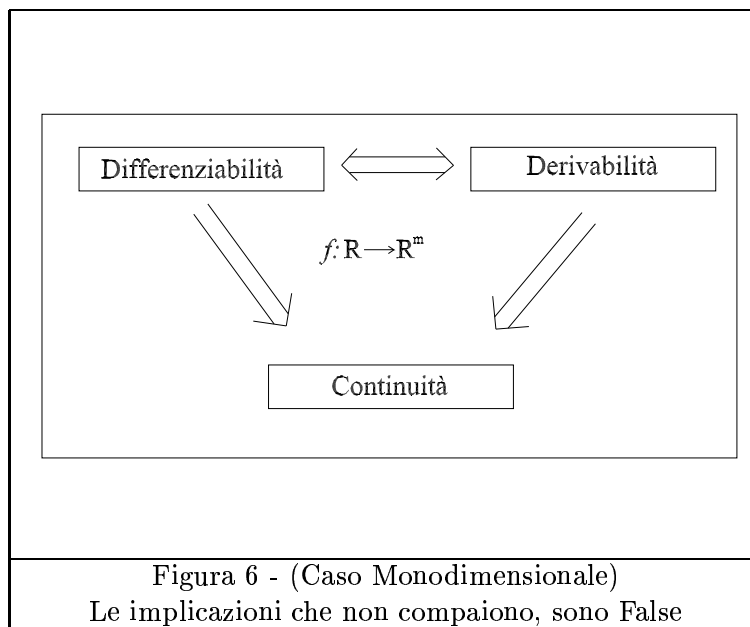
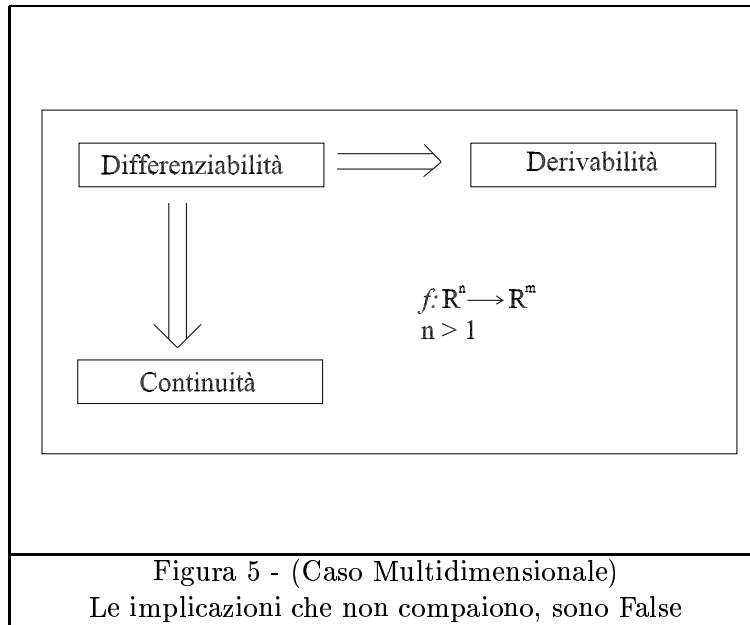
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \quad (g_i = i\text{-esima componente di } \underline{g}(\underline{y}))$$

con  $1 \leq i \leq p$  e  $1 \leq j \leq n$ .

---

<sup>5</sup>N.B. vale soltanto nel caso in cui  $f$  sia Differenziabile

I rapporti fra i concetti di differenziabilità, derivabilità e continuità, possono essere riassunti nello schema seguente di implicazioni logiche, nel quale sono distinti il caso del dominio multidimensionale da quello del dominio monodimensionale.



### 13.8 Punti di Massimo e minimo Relativi

**Osservazione 7 (Preliminare)** *Il calcolo dei punti di Massimo e di minimo di una funzione, è lecito soltanto nel caso in cui  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè sia una funzione reale.*

*Infatti per poter dire che la funzione assume un valore maggiore in un punto, e minore in un altro, il valore stesso deve appartenere ad un insieme che goda di un ordinamento;  $\mathbb{R}$  ha un ordinamento, cioè, dato un qualsiasi elemento di  $\mathbb{R}$  è sempre possibile trovarne un'altro che sia maggiore o minore; ma a partire da  $\mathbb{R}^2$ , non lo si ha più (infatti non ha alcun senso dire che  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ , dove i due elementi, sono evidentemente appartenenti ad  $\mathbb{R}^2$ ).*

**Definizione 31 (Punto Stazionario)** *E' un punto di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $df(\underline{x}_0) = 0$ ; esso può essere un punto di massimo, di minimo o di sella<sup>6</sup> per  $f$*

**Teorema 58 (Esistenza dei punti di massimo o minimo)** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\underline{x}_0 \in A$  un punto di Massimo o minimo relativo per  $f$ , interno ad  $A$ .*

*Se  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ , allora  $df(\underline{x}_0) = 0$ .*

*Ciò corrisponde a dire che*

$$\nabla f(\underline{x}_0) = 0$$

*Infatti  $df(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) dx_i = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\underline{x}_0) = 0$ .*

**Teorema 59 (Punto di Minimo)** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , una funzione di classe  $C^2(A)$ . Sia  $\underline{x}_0 \in A$  un punto Stazionario per  $f$ .*

*Si indichi con  $H(\underline{x}_0)$  la matrice Hessiana di  $f$  calcolata in  $\underline{x}_0$ ; affinché  $\underline{x}_0$  sia di minimo relativo:*

- *è necessario che  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$  risulti  $\left( H(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \geq 0$ .<sup>[7]</sup>*
- *E' sufficiente che  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \neq 0$  sia  $\left( H(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} \right) > 0$ .<sup>[8]</sup>*

<sup>6</sup>Generalizzazione di punto di flesso, cioè, né di Massimo, né di minimo. Se  $f$  è una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , in un intorno di  $\underline{x}_0$ , la funzione assumerà la caratteristica forma di una sella.

<sup>7</sup>Si dice che la matrice Hessiana è semi-definita positiva in  $\underline{x}_0$

<sup>8</sup>Si dice che la matrice Hessiana è definita positiva in  $\underline{x}_0$

**Teorema 60 (Punto di Massimo)** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , una funzione di classe  $C^2(A)$ . Sia  $\underline{x}_0 \in A$  un punto Stazionario per  $f$ . Si indichi con  $H(\underline{x}_0)$  la matrice Hessiana di  $f$  calcolata in  $\underline{x}_0$ ; affinché  $\underline{x}_0$  sia di massimo relativo:

- è necessario che  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n$  risulti  $\left( H(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \leq 0$ .<sup>[9]</sup>
- E' sufficiente che  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \neq 0$  sia  $\left( H(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} \cdot \underline{v} \right) < 0$ .<sup>[10]</sup>

---

<sup>9</sup>Si dice che la matrice Hessiana è semi-definita negativa in  $\underline{x}_0$

<sup>10</sup>Si dice che la matrice Hessiana è definita negativa in  $\underline{x}_0$

## Calcolo degli Autovalori della Matrice Hessiana

Per vedere se  $\underline{x}_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo per  $f$ , bisogna, quindi, vedere se  $H(\underline{x}_0)$  è definita negativa o positiva, rispettivamente, cioè bisogna calcolare gli autovalori <sup>11</sup> di  $H(\underline{x}_0)$ .

Essi si ottengono, risolvendo il sistema dato da

$$\det \left( H(\underline{x}_0) - \lambda I \right) = 0$$

$$\text{dove } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ed } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Tale sistema ha  $n$  soluzioni, e potrebbe non essere sempre risolvibile analiticamente. Ricavati tutti gli autovalori di  $H$ , si ha che:

- i) se gli autovalori di  $H(\underline{x}_0)$  sono tutti strettamente positivi, la matrice Hessiana è definita positiva.
- ii) Se gli autovalori di  $H(\underline{x}_0)$  sono tutti strettamente negativi, la matrice Hessiana è definita negativa.

---

<sup>11</sup>Vedi pag. 232

**13.8.1 Per funzioni di 2 Variabili**

Sia  $f(x, y)$  una funzione di classe  $C^2(D)$  con  $D = \text{Dominio di } f$ . Sia  $\underline{x}_0$  un punto stazionario per  $f$ ; sia  $H_f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$  l'Hessiana di  $f$  calcolata in  $\underline{x}_0$ ; si ha che:

1. se  $\det H_f(\underline{x}_0) > 0$  e se  $f_{xx}(\underline{x}_0) > 0$  allora  $\underline{x}_0$  è di MINIMO relativo per  $f$ .
2. Se  $\det H_f(\underline{x}_0) > 0$  e se  $f_{xx}(\underline{x}_0) < 0$  allora  $\underline{x}_0$  è di MASSIMO relativo per  $f$ .
3. Se  $\det H_f(\underline{x}_0) < 0$ , allora  $\underline{x}_0$  è di SELLA per  $f$ .
4. Se  $\det H_f(\underline{x}_0) = 0$ , allora non si può affermare nulla, e bisogna studiare il segno di  $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)$ .

### 13.9 Punti di Massimo e minimo Vincolati

**Teorema 61 (Moltiplicatori di Lagrange)** *Data una funzione*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ e } \begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \end{cases} \text{ } m \text{ equazioni denominate}$$

*Vincoli, per trovare i punti di massimo e minimo vincolati, è necessario risolvere il sistema di  $n + m$  equazioni in altrettante incognite, formato dalle  $n$  equazioni:*

$$\nabla \left( f + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i \right) = 0 \text{ (con } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{)}$$

*più le equazioni degli  $m$  vincoli; cioè bisogna risolvere il seguente sistema:*

$$\begin{cases} f_{x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & = & 0 \\ f_{x_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & = & 0 \\ f_{x_3} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_3} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_3} & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & = & 0 \\ F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \\ F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \\ F_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ F_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

*Dove le  $n + m$  incognite sono  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .*

*Ricavate le  $k$  soluzioni, per esempio:  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ , che per opportuni valori di  $\lambda_1, \lambda_2$  ecc. soddisfino il sistema; si calcoli  $f(\underline{x}_i)$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . L' “ $i$ -esima” soluzione che farà assumere valor massimo alla funzione, sarà il punto di massimo, quella che le farà assumere valor minimo, sarà, banalmente, il punto di minimo.*



### 13.10 Funzioni Implicite

**Teorema 62 (del Dini)** Sia  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , continua e derivabile rispetto ad  $y$  in un insieme aperto  $D$ . Sia  $f(x_0, y_0) = 0$  e  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ ; allora esistono due intorni  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  e  $V = (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ , con  $\delta, \eta \in \mathbb{R} : \delta, \eta > 0$ ; tali che valga la seguente proprietà:

$$\forall x \in U, \exists \text{ un solo } y \in V : f(x, y) = 0$$

Ovvero esiste una funzione  $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$  tale che  $f(x, \varphi(x)) = 0$ ; e si dice che  $f(x, y) = 0$  definisce implicitamente la funzione  $y = \varphi(x)$ , cioè l'insieme degli zeri di  $f$ , è un grafico cartesiano locale.

**Teorema 63 (Differenziabilità della funzione esplicitata)** Nelle ipotesi del teorema del Dini, si ha che:

1.  $\varphi$  è continua in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .
2. Se  $f_x$  è continua in  $D$ , allora si ha che  $\dot{\varphi}(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$ .

**Corollario 2 (Differenziabilità della funzione esplicitata)** Nelle ipotesi del teorema del Dini, se  $f \in C^k(D)$ , allora anche  $\varphi$  è di classe  $C^k(D)$ .

#### Conseguenze del teorema del Dini

Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , è di classe  $C^1$ , ed è  $\nabla f \neq 0$  in un intorno di  $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ , allora, in tale intorno  $f(x, y) = 0$  definisce un arco di curva semplice e regolare<sup>12</sup>.

#### Equazione della retta tangente

L'equazione della retta tangente al grafico di  $\varphi(x)$  nel punto  $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ , è data da

$$y - y_0 = \dot{\varphi}(\underline{x}_0) \cdot (x - x_0)$$

Ricordando che  $\dot{\varphi}(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$ , l'equazione precedente, può essere scritta anche:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

---

<sup>12</sup>Una curva semplice e Regolare è una curva che ammette, in ogni suo punto, retta tangente

**Teorema 64 (delle Funzioni Implicite, caso Generale)** *Data una funzione  $\underline{f}(\underline{x}) : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , di classe  $C^1$  (nel suo dominio  $D$ ), e tale che  $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$ ; sia  $\underline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+k}^0)$  una soluzione dell'equazione  $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$ , ed in tale punto, la matrice Jacobiana di  $\underline{f}$ , abbia caratteristica  $k$  (cioè caratteristica Massima). Cioè esistano  $k$  variabili (fra le  $n+k$  disponibili) che indicheremo con  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ , la cui scelta fra  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$  può cambiare da punto a punto, tali che risulti:*

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k}{\partial y_2} & \frac{\partial f_k}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \end{array} \right\| \neq 0$$

Allora esiste un intorno  $U$  di  $\underline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$  ed un intorno  $V$  di  $\underline{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, \dots, y_k^0)$ , tali che  $\forall \underline{x} \in U$  esiste un solo  $\underline{y} \in V$  tale che sia  $\underline{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_k) = \underline{0}$ . Cioè esistono  $k$  funzioni di  $n$  variabili  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k)$ , tali che risulti:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(\underline{x}, \varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_k(\underline{x})) & = & \tilde{f}_1(\underline{x}) = 0 \\ f_2(\underline{x}, \varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_k(\underline{x})) & = & \tilde{f}_2(\underline{x}) = 0 \\ f_3(\underline{x}, \varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_k(\underline{x})) & = & \tilde{f}_3(\underline{x}) = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ f_k(\underline{x}, \varphi_1(\underline{x}), \varphi_2(\underline{x}), \dots, \varphi_k(\underline{x})) & = & \tilde{f}_k(\underline{x}) = 0 \end{array} \right.$$

Dove si è posto  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  e  $\varphi_j(\underline{x}) = y_j(\underline{x})$  con  $j = 1, 2, 3, \dots, k$ . Si osservi che, le  $k$  funzioni  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ , che prima erano funzioni di  $n+k$  variabili, si sono espresse come funzioni di sole  $n$  variabili.

N.B. Anche questo teorema fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria affinché l'insieme  $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$  descriva una varietà semplice e regolare, in un intorno del punto  $\underline{x}_0$ . Se le ipotesi del suddetto teorema non sono tutte verificate, allora non si può affermare nulla, e la funzione in esame necessita di uno studio più approfondito.

### Derivata della Funzione Esplicitata

Dal sistema soprastante, considerando che si tratta di funzioni composte, si ha:

$$\frac{\partial \tilde{f}_l}{\partial x_i} = \frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_l}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$$

Con  $(l = 1, 2, 3, \dots, k \quad i = 1, 2, 3, \dots, n)$ . Ricordando che  $n$  è il numero delle variabili indipendenti, mentre  $k$  è la caratteristica della matrice Jacobiana di  $\underline{f}(\underline{x})$ , e indica il numero di variabili che si possono esprimere in funzione delle  $n$  variabili disponibili.

**Osservazione 8** Se  $\underline{f}(\underline{x})$  descrive una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , e le ipotesi del teorema delle funzioni implicite è soddisfatto; allora la superficie si dirà semplice e regolare<sup>13</sup>.

### Rette e Piani Tangenti

Se la funzione  $\underline{f}(\underline{x}) = 0$  con  $\underline{f} : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , descrive, in un intorno di  $\underline{x}_0$ , un arco di curva semplice e regolare, o una superficie semplice e regolare; è lecito domandarsi quale sarà l'equazione della retta tangente o del piano tangente, in  $\underline{x}_0$ .

Se  $n + k = 3$ , si hanno i due seguenti casi:

1.  $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (cioè  $n = 2; k = 1$ ).

Sia  $\underline{f}(x, y, z) = 0$ ; se è soddisfatto il teorema delle funzioni implicite, allora si può esplicitare, per esempio,  $z$  in funzione di  $x$  e  $y$ , cioè si pone:  $z = \varphi(x, y)$ . Si ha una nuova funzione nelle variabili  $x, y$ , data da:  $\tilde{f}(x, y) = \underline{f}(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ .

Essendo soddisfatto il teorema delle funzioni implicite, la funzione è di classe  $C^1(I(\underline{x}_0))$ , e risulta  $\text{Car}|J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)| = k = 1$ . Allora il piano tangente tale superficie in  $\underline{x}_0$ , ha equazione:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

2.  $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (cioè  $n = 1; k = 2$ ).

$$\text{Sia } \underline{f}(x, y, z) = \begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema, cioè risulta  $\underline{f} \in C^1(I(\underline{x}_0))$  e  $\text{Car}|J_{\underline{f}}(\underline{x}_0)| = k = 2$ , allora esistono due funzioni  $\varphi$  e  $\psi$ , tali che  $x = \varphi(z)$ ,  $y = \psi(z)$ , e quindi  $\tilde{f}(z) = \underline{f}(x, y, z) = \underline{f}(\varphi(z), \psi(z), z) = 0$ .

<sup>13</sup>Una superficie si dice Semplice e Regolare, se in ogni suo punto, ammette piano tangente

In questo caso, il sistema  $\underline{f}(x, y, z) = \begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$  descrive un arco di curva semplice e regolare, allora la retta tangente tale curva in  $\underline{x}_0$ , ha equazione parametrica:  $r) = \begin{cases} x - x_0 = J_1 \cdot t \\ y - y_0 = J_2 \cdot t \\ z - z_0 = J_3 \cdot t \end{cases}$  con  $t \in \mathbb{R}$

Dove  $J_1, J_2, J_3$  hanno il seguente significato:

sia  $J = \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix}$  la matrice Jacobiana della funzione  $\underline{f}(x, y, z)$ .

Si costruisce il vettore  $\underline{J} = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{matrix} \right\|$  che è il vettore tangente

la curva in  $\underline{x}_0$  (infatti si ha:  $\underline{J} = \nabla g \times \nabla h$ ).

Si ha:  $\underline{J} = \begin{vmatrix} g_y & g_z \\ h_y & h_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} g_x & g_z \\ h_x & h_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{vmatrix} \vec{k}$

Quindi  $J_1 = \begin{vmatrix} g_y & g_z \\ h_y & h_z \end{vmatrix}$ ;  $J_2 = - \begin{vmatrix} g_x & g_z \\ h_x & h_z \end{vmatrix}$ ;  $J_3 = \begin{vmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{vmatrix}$

In forma compatta, il vettore  $\underline{J}$ , si indica:  $\underline{J} = J_1 \cdot \vec{i} + J_2 \cdot \vec{j} + J_3 \cdot \vec{k}$ .

## Capitolo 14

# Equazioni Differenziali

### 14.1 Definizioni

**Definizione 32 (di Equazione Differenziale)** *Data un'espressione del tipo  $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ , dove  $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ , ed  $y(x)$  è una funzione incognita; essa prende il nome di **Equazione Differenziale Ordinaria di Ordine “n”**, in quanto la funzione incognita  $y(x)$  compare, nell'espressione, fino all'ordine di derivazione n-esimo.*

**Definizione 33 (Soluzioni di un'equazione diff.)** *Ogni funzione  $y(x)$  che sostituita, con le sue derivate fino all'ordine “n”, all'interno dell'espressione  $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ , la renda un'identità, si chiama **Soluzione o Integrale** dell'equazione differenziale data.*

#### Caratteristica delle Soluzioni

Le soluzioni di un'equazione differenziale di ordine “n”, sono infinite, e dipendono da “n” costanti arbitrarie.

**Definizione 34 (Integrale Generale)** *E' l'insieme di tutte le soluzioni (o Integrali) di un'equazione differenziale  $\Phi(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$  dove  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  sono costanti arbitrarie.*

**Definizione 35 (Equazione diff. Normale e Non Normale)** *Le equazioni differenziali si possono rappresentare in due modi diversi:*

1.  $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$     **Forma Non Normale**
2.  $y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$     **Forma Normale**

## 14.2 Problema di Cauchy

**Definizione 36 (Problema di Cauchy)** *Per selezionare una sola soluzione fra le infinite, di un'equazione differenziale di ordine “n”, è necessario imporre “n” condizioni. Queste condizioni, consistono nell'assegnare il valore della funzione y, e delle sue derivate fino all'ordine “n-1”, in un particolare punto  $x_0$ ; cioè si ha:*

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right. \quad P. \text{ di Cauchy in forma Non Normale}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right. \quad P. \text{ di Cauchy in forma Normale}$$

## 14.3 Problema ai Limiti

**Definizione 37 (Problema ai Limiti)** *Se al posto dei valori assunti dalle derivate, fino all'ordine “n-1”, vengono forniti i valori, che la funzione assume in punti distinti  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , allora si parla di Problema ai Limiti.*

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \\ y(x_3) = y_3 \\ \dots \\ y(x_n) = y_n \end{array} \right. \quad \text{Problema ai Limiti}$$

## 14.4 Equazioni del Primo Ordine

I teoremi che seguono verranno applicati a equazioni differenziali espresse in forma Normale.

### 14.4.1 Teoremi

**Teorema 65 (Equazione di Volterra)** *Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua nell'aperto  $\Omega$ , e sia  $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ; allora i due seguenti problemi, sono equivalenti in un intorno di  $\underline{x}_0$ :*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

**Teorema 66 (di Cauchy, di esistenza ed unicità locale (o in piccolo))**

*Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua nell'aperto  $(a, b) \times (c, d)$ , e sia  $f$  Lipschitziana nella variabile  $y$ , cioè sia:  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$  con  $K \geq 0$ . Allora esiste, ed è unica, la soluzione del problema di Cauchy, ed è tale che  $y : [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \eta; y_0 + \eta]$  con  $\delta, \eta \in \mathbb{R} : \delta, \eta > 0$ .*

**Osservazione 9 (Lipschitzianità)** *La condizione di Lipschitzianità rispetto ad  $y$ , resta verificata, se la funzione  $f(x, y)$  ha*  
**derivata continua rispetto ad  $y$ .**

**Osservazione 10 (Significato geometrico del teorema di Cauchy)** *Il teorema di Cauchy implica che due soluzioni distinte,  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ , non possano intersecarsi nei punti in cui il teorema medesimo resti valido.*

**Osservazione 11 (Più di una soluzione)** *Se non è verificata la condizione di Lipschitzianità, in generale, il problema di Cauchy, avrà più di una soluzione.*

**Teorema 67 (di Cauchy, di esistenza ed unicità globale (o in grande))**

*Sia dato un problema di Cauchy del primo ordine, che soddisfi le ipotesi del teorema locale in  $S = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ , e valga in  $S$  la maggiorazione  $|f(x, y)| \leq A + B|y - y_0|$  con  $A, B \in \mathbb{R}$ ; allora la soluzione del problema esiste, ed è unica in tutto  $(\alpha, \beta)$ , ed, in particolare, non possono esserci asintoti verticali in  $(\alpha, \beta)$ .*

**Corollario 3 (Teorema Globale)** *La condizione*

$|f(x, y)| \leq A + B|y - y_0|$  *del teorema globale, è soddisfatta quando si verifici una delle seguenti condizioni:*

- $|f(x, y)| \leq M \in \mathbb{R}$       ( $f$  è limitata in  $S = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ )
- $|f_y(x, y)| \leq M \in \mathbb{R}$       ( $f_y$  è limitata in  $S = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ )

## 14.5 Studio a-priori ed a-posteriori

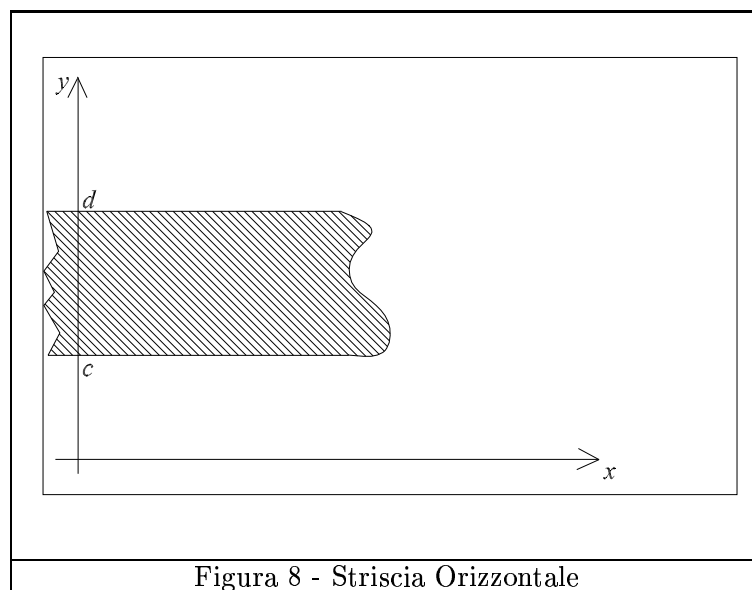
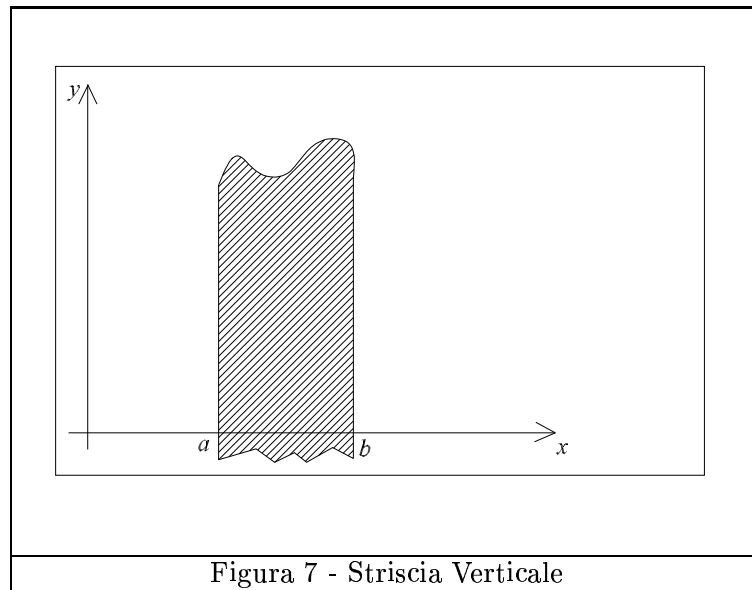
Sia data un'equazione differenziale del prim'ordine  $y'(x) = f(x, y)$ ; per effettuare uno studio a-priori dell'equazione (cioè senza risolverla), si devono seguire i seguenti punti:

1. **(STUDIO A-PRIORI).** Si osservano gli intervalli in cui  $f(x, y)$  è di classe  $C^1$  o  $C^\infty$ , oppure se ha derivata, rispetto ad  $y$ , continua; nel qual caso è valido il teorema di esistenza ed unicità locale, in tali intervalli.
2. Si effettua lo stesso studio del punto 1, per l'equazione rovesciata:  $x'(y) = \frac{1}{f(x, y)} = g(x, y)$ .
3. Si determinano i **Punti Singolari**, cioè quei punti del piano che annullino contemporaneamente le due funzioni  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ .
4. Si attua lo studio del segno di  $f(x, y)$  (comune anche a  $g(x, y)$ ), per definire le porzioni di piano in cui  $y(x)$  è crescente o decrescente.
5. Se possibile, si studia il segno della derivata seconda di  $y(x)$ , determinando, così, le porzioni di piano in cui  $y(x)$  è concava o convessa.



6. Si studia il comportamento asintotico, cioè si osservano gli intervalli in cui è valido il teorema di esistenza ed unicità globale, per escludere a-priori l'esistenza di:

- **Asintoti Verticali** se si studia  $|f(x, y)| \leq M$  (oppure  $|f_y(x, y)| \leq M$ ) su una striscia verticale.
- **Asintoti Orizzontali** se si studia  $|g(x, y)| \leq M$  (oppure  $|g_x(x, y)| \leq M$ ) su una striscia orizzontale.



7. In base alle informazioni, fin qui ricavate, si traccia il grafico cartesiano qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy.

8. **(STUDIO A-POSTERIORI).** Se la funzione  $f(x, y)$  è a variabili separabili, cioè della forma:  $f(x, y) = h(x) \cdot j(y)$ , allora si procede nel seguente modo:  
 $y' = h(x) \cdot j(y) \Rightarrow \frac{y'}{j(y)} = h(x)$  (senza preoccuparsi di porre  $j(y) \neq 0$ ). Dall'eguaglianza di tali funzioni, discende quella degli integrali indefiniti:  $\int \frac{y'}{j(y)} dx = \int h(x) dx$ , ricordando che  $y' dx = dy$ , si ha:  
 $\int \frac{dy}{j(y)} = \int h(x) dx$ , con la quale si può ricavare  $y(x)$  oppure  $x(y)$ , e si verificano i risultati ottenuti con lo studio a-priori.

## 14.6 Equazioni Differenziali Lineari

**Definizione 38 (Equazione diff. Lineare)** Un'equazione del tipo

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

si dice *Lineare*, se l'applicazione  $F$  è lineare nelle variabili  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ; cioè si ha:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

In un intervallo in cui sia  $a_n(x) \neq 0$ , dividendo entrambi i membri per  $a_n(x)$ ; si ha:

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$$

dove le funzioni  $a_i(x)$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  sono funzioni continue in un opportuno intervallo.

**Definizione 39 (Integrale Generale)** Data l'equazione differenziale

$$L(y) = f(x)$$

l'integrale generale è dato da:

$$y = \bar{y} + \hat{y}$$

dove  $\bar{y}$  è l'integrale generale dell'equazione Omogenea Associata (cioè, si ha:  $L(\bar{y}) = 0$ ); ed  $\hat{y}$  è una soluzione particolare dell'equazione data (cioè, si ha:  $L(\hat{y}) = f(x)$ ) fissata una volta per tutte.

### Equazioni Differenziali Lineari Omogenee

L'equazione differenziale si dice Omogenea, quando è:  $f(x) = 0$   
 quindi l'equazione stessa si riduce a  $L(y) = 0$ .

Data l'equazione  $L(y) = 0$ , e poste  $n - 1$  condizioni, il teorema di Cauchy

garantisce, sotto le ipotesi che  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ , siano continue, che l'equazione data ha una sola soluzione.

Sia  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  il sistema fondamentale di soluzioni. Le funzioni  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  sono linearmente indipendenti, quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea si scriverà come combinazione lineare di tali funzioni:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$$

dove le  $c_i$  sono costanti arbitrarie, dipendenti dalle condizioni iniziali del problema di Cauchy.

**Teorema 68 (di esistenza ed unicità di Cauchy)** *Sia data un'equazione differenziale lineare a coefficienti continui in un intervallo  $[a, b]$ . Allora, per ogni  $n$ -upla di condizioni iniziali  $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ , esiste una, ed una sola soluzione del problema di Cauchy.*

**Teorema 69 (del Wronskiano)** *Si definisce Wronskiano delle soluzioni, il determinante dato da:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_3^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

*Sia data un'equazione differenziale lineare omogenea, a coefficienti continui sull'intervallo  $[a, b]$ . Siano  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ , le “ $n$ ” soluzioni di tale equazione; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- L'insieme  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  è un sistema fondamentale di soluzioni.
- $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .
- $\exists x_0 \in (a, b) : W(x_0) \neq 0$ .

### 14.6.1 Equazione diff. Lineare del Primo ordine a coefficiente Continuo

Sia data l'equazione differenziale del tipo:

$$y' + a(x)y = f(x)$$

in cui  $a(x)$  e  $f(x)$  siano funzioni continue. L'integrale generale di tale equazione è dato da:

$$y(x) = \left[ \int_{x_0}^x f(t) e^{A(t)} dt + K \right] \cdot e^{-A(x)} \quad (14.1)$$

Dove  $A(x)$  è una qualsiasi primitiva di  $a(x)$ , cioè  $A(x) = \int a(x) dx$ ; e  $K$  è una costante arbitraria che verrà determinata, assegnando un problema di Cauchy.

## 14.7 Equazioni Differenziali Lineari di ordine “n” a coefficienti Costanti

### 14.7.1 Equazione Omogenea

E' un'equazione del tipo

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (14.2)$$

in cui i coefficienti  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  sono costanti (quindi non dipendenti da  $x$ ). Una soluzione di tale equazione è data da  $y(x) = e^{\lambda x} \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$  dove il polinomio  $P(\lambda)$  è denominato polinomio caratteristico dell'equazione omogenea, ed è tale che

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \quad (14.3)$$

Il teorema fondamentale dell'algebra, garantisce che il polinomio caratteristico  $P(\lambda)$ , ha esattamente “n” soluzioni, fra quelle reali e quelle complesse (con le loro coniugate); si hanno i seguenti tre casi:

1. L'equazione  $P(\lambda) = 0$ , ha “n” soluzioni Reali distinte, siano esse  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ . Allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} = \bar{y} \quad (14.4)$$

Con  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  costanti reali arbitrarie.

2. L'equazione  $P(\lambda) = 0$ , ha “k” coppie di soluzioni Complesse, siano esse  $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \alpha_k \pm i\beta_k$ . Allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da:

$$y(x) = \sum_{j=1}^k e^{\alpha_j x} (r_j \cos(\beta_j x) + s_j \sin(\beta_j x)) = \bar{y}$$

Con  $r_1, r_2, \dots, r_k$  ed  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , costanti reali arbitrarie.

3. L'equazione  $P(\lambda) = 0$ , ha soluzioni Multiple, sia  $\lambda_0$  una soluzione reale, o complessa di molteplicità  $\mu$ . L'integrale generale dell'equazione omogenea è dato da:

- $y(x) = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 x e^{\lambda_0 x} + c_3 x^2 e^{\lambda_0 x} + \dots + c_\mu x^{\mu-1} e^{\lambda_0 x} = \bar{y}$   
Se  $\lambda_0$  è reale.
- $e^{\alpha x} (r_1 \cos(\beta x) + s_1 \sin(\beta x)) + e^{\alpha x} x (r_2 \cos(\beta x) + s_2 \sin(\beta x)) + \dots + e^{\alpha x} x^{\mu-1} (r_\mu \cos(\beta x) + s_\mu \sin(\beta x)) = \bar{y}$   
Se  $\lambda_0 = \alpha \pm i\beta$  (Complesso).

4. L'equazione  $P(\lambda) = 0$ , ha soluzioni miste, cioè reali e complesse con molteplicità diverse. Allora  $y(x)$  si otterrà sommando fra loro le soluzioni ricavate ai punti 1, 2 e 3.

### 14.7.2 Equazione Non Omogenea

Per la definizione dell'integrale generale<sup>1</sup>, si rende necessario, oltre al calcolo dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, il calcolo di una soluzione particolare dell'equazione  $L(y) = f(x)$ ; sia  $\hat{y}$  tale soluzione.

Per determinare tale soluzione, esistono due metodi fondamentali, essi sono:

### 14.7.3 Metodo delle Costanti Arbitrarie di Lagrange

Si pone

$\hat{y} = \lambda_1(x)y_1 + \lambda_2(x)y_2 + \lambda_3(x)y_3 + \dots + \lambda_n(x)y_n$  dove

$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x), \dots, \lambda_n(x)$  sono funzioni da determinare, e  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  costituiscono il sistema fondamentale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Per determinare le funzioni  $\lambda_i(x)$  si deve risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 + \dots + \lambda_n' y_n = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \dots + \lambda_n' y_n' = 0 \\ \lambda_1' y_1'' + \lambda_2' y_2'' + \dots + \lambda_n' y_n'' = 0 \\ \lambda_1' y_1''' + \lambda_2' y_2''' + \dots + \lambda_n' y_n''' = 0 \\ \dots \\ \lambda_1' y_1^{n-2} + \lambda_2' y_2^{n-2} + \dots + \lambda_n' y_n^{n-2} = 0 \\ \lambda_1' y_1^{n-1} + \lambda_2' y_2^{n-1} + \dots + \lambda_n' y_n^{n-1} = f(x) \end{cases}$$

Dove, le incognite sono le  $\lambda_i'(x)$  (ATTENZIONE, non le  $\lambda_i(x)$ ), e si può notare che, il determinante caratteristico è proprio il Wronskiano delle soluzioni  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ , e quindi risulta sempre diverso da zero<sup>2</sup>. Risolvendo tale sistema, con il metodo di Kramer, si ricavano le funzioni  $\lambda_i'(x)$ ; quindi per ricavare ciò che realmente serve, e cioè  $\lambda_i(x)$ , è necessario risolvere “n” integrali indefiniti.

N.B. Questo metodo è generale, e può essere utilizzato anche quando i coefficienti dell'equazione differenziale non sono costanti, ma funzioni continue.

### 14.7.4 Metodo delle Funzioni Simili

Serve per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, quando  $f(x)$  è del tipo:

$$f(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x) + R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\omega x)$$

dove, con  $Q_k(x)$  e  $R_k(x)$ , si sono indicati due polinomi in  $x$ , di grado  $k$ , a coefficienti Reali.

<sup>1</sup>vedi Definizione n.39 pag. 82

<sup>2</sup>Vedi Teorema n. 69 a pag. 83

**Osservazione 12** indicando con  $f_1(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$  e con  $f_2(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\omega x)$ , si ha che, per trovare una soluzione particolare, si possono trovare due soluzioni distinte  $\hat{y}_1$  ed  $\hat{y}_2$ , rispettivamente di  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ . Allora la soluzione di  $L(\hat{y}) = f_1(x) + f_2(x)$ , è data da  $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ . Questa osservazione è nota, in fisica, come: “Principio di sovrapposizione”, ed è valida soltanto per problemi lineari.

N.B. Questo metodo è valido soltanto per equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti.

Per trattare il metodo delle funzioni simili, verrà trattato soltanto il caso in cui  $f(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$  ( $k = 0$  vuol dire che  $Q_k(x)$  è una costante). Per il caso in cui  $f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\omega x)$ , basta non considerare i casi in cui  $\omega = 0$ , in quanto casi non interessanti; infatti, in tali casi  $f(x) = 0$ , e si ha l'equazione omogenea!

Si possono verificare i seguenti casi:

•

$$\alpha \neq 0; \omega = 0$$

Allora  $f(x) = Q_k(x)e^{\alpha x}$ . In questo caso si osserva se  $\alpha$  è una soluzione del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata; se lo è, sia  $\mu$  la sua molteplicità. Una soluzione particolare dell'equazione data è:

$$\hat{y} = x^\mu P_k(x)e^{\alpha x} \quad (14.5)$$

Dove  $P_k(x)$  è un polinomio in  $x$ , di grado  $k$ , da determinare.

Se  $\alpha$  non è soluzione del polinomio caratteristico ( $\mu = 0$ ), la soluzione si riduce a  $\hat{y} = P_k(x)e^{\alpha x}$

•

$$\alpha = 0; \omega \neq 0$$

Allora  $f(x) = Q_k(x) \cos(\omega x)$  e si hanno i due seguenti casi:

- i)  $\pm i\omega$  è soluzione del polinomio caratteristico, con molteplicità  $\mu$ ; allora la soluzione è:

$$\hat{y} = x^\mu \left( P_k(x) \cos(\omega x) + S_k(x) \sin(\omega x) \right) \quad (14.6)$$

con  $P_k(x)$  e  $S_k(x)$  polinomi in  $x$  di grado  $k$  a coefficienti reali, da determinare.

- ii)  $\pm i\omega$  non è soluzione del polinomio caratteristico (quindi  $\mu = 0$ ), la soluzione dell'equazione è:

$$\hat{y} = P_k(x) \cos(\omega x) + S_k(x) \sin(\omega x)$$

con  $P_k(x)$  e  $S_k(x)$  polinomi in  $x$  di grado  $k$  a coefficienti reali, da determinare.

•

$$\alpha = 0; \omega = 0$$

Allora  $f(x) = Q_k(x)$ . in questo caso la soluzione è:

$$\hat{y} = x^\mu P_k(x) \quad (14.7)$$

dove  $\mu$  è la molteplicità della soluzione  $\lambda = 0$  del polinomio caratteristico. Se  $\lambda = 0$  non è soluzione del polinomio caratteristico ( $\mu = 0$ ), la soluzione si riduce a:

$$\hat{y} = P_k(x)$$

•

$$\alpha \neq 0; \omega \neq 0$$

Allora  $f(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$ ; anche in questo caso ci sono due possibilità:

- i)  $\alpha \pm i\omega$  è soluzione del polinomio caratteristico, con molteplicità  $\mu \neq 0$ ; allora la soluzione è:

$$\hat{y} = x^\mu e^{\alpha x} \left( P_k(x) \cos(\omega x) + S_k(x) \sin(\omega x) \right) \quad (14.8)$$

- ii)  $\alpha \pm i\omega$  non è soluzione del polinomio caratteristico ( $\mu = 0$ ), allora la soluzione si riduce a:

$$\hat{y} = e^{\alpha x} \left( P_k(x) \cos(\omega x) + S_k(x) \sin(\omega x) \right)$$

Come sempre,  $P_k(x)$  e  $S_k(x)$ , sono polinomi in  $x$  a coefficienti reali, di grado  $k$

Per determinare i coefficienti dei polinomi  $P_k(x)$  e  $S_k(x)$ , che compaiono nelle soluzioni, è necessario sostituire  $\hat{y}$ , con le sue derivate fino all'ordine "n", all'interno dell'equazione differenziale di partenza. Si osservi che, se  $P_k(x)$  è un polinomio di grado  $k$ , esso si scriverà:

$$P_k(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + A_{k-2} x^{k-2} + \dots + A_1 x + A_0$$

Dove  $(A_k, A_{k-1}, A_{k-2}, \dots, A_1, A_0)$  sono costanti reali.

Esempio: se  $k = 3$ , si ha:

$$P_3(x) = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$



## Capitolo 15

# Successioni e Serie di Funzioni Reali

### 15.1 Successione di Funzioni

**Definizione 40 (Successione di Funzioni)** Si definisce *successione di funzione*, ogni corrispondenza, che ad ogni numero naturale  $n$  associa una, ed una sola funzione. Essa viene indicata con  $\{f_n(x)\}$ .

**Definizione 41 (Insieme di convergenza semplice (o puntuale))** Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni reali definite in un insieme  $E$ ; il sottoinsieme  $S \subseteq E$  costituito dai punti nei quali la successione  $\{f_n(x)\}$  converge, è detto *insieme di Convergenza semplice o puntuale*.

**Definizione 42 (Funzione limite della successione)** La funzione  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  ottenuta associando ad ogni punto  $x \in S$  il limite della successione  $\{f_n(x)\} : f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  con  $x \in S$ , è detta *funzione limite della successione*. Si dice anche che la successione  $\{f_n(x)\}$  converge semplicemente (o puntualmente) ad  $f(x)$  in  $S$ . Ovvero :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in S, \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \text{ si abbia } |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Definizione 43 (Convergenza uniforme)** Una successione  $\{f_n(x)\}$  di funzioni reali definite in  $E$ , si dice che converge uniformemente in un sottoinsieme  $U$  di  $E$  se, e solo se :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in U, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \text{ e } \forall x_0 \in U \text{ si abbia } |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Teorema 70 (Derivabilità e convergenza)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni reali derivabili in  $(a, b)$  che converge almeno in un punto  $x_0 \in (a, b)$ . Se la successione  $\{f'_n(x)\}$  converge uniformemente in  $(a, b)$  ad una funzione  $\varphi(x)$ , allora  $\{f_n(x)\}$  converge uniformemente in  $(a, b)$  ad una funzione  $f$ , tale che

$$f'(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

**Teorema 71 (Conseguenze dell'uniforme convergenza)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni reali che converge uniformemente a  $f(x)$  in  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ; allora valgono le proprietà:

1. se  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in U : |f_n(x)| \leq k$ , allora  $f(x)$  è limitata in  $U$
2. se  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x)$  è continua in un punto  $x_0 \in U$ , allora  $f(x)$  è continua in  $x_0$ .

**Teorema 72 (Condizione sufficiente alla uniforme convergenza)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni reali che converge semplicemente in  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Se esiste una successione  $\{C_n\}$  tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq C_n \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = 0$$

allora la successione  $\{f_n(x)\}$  converge uniformemente in  $E$ .

## 15.2 Serie di Funzioni Reali di Variabile Reale

**Definizione 44 (Serie di funzioni)** Data una successione di funzioni reali  $\{f_n(x)\}$  tutte definite in  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , consideriamo la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  ad essa associata. Per ogni  $x \in E$  fissato, tale serie è una serie numerica.

**Definizione 45 (Insieme di convergenza semplice (o puntuale))** L'insieme  $S \subseteq E$  dei punti nei quali la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge è detto insieme di convergenza semplice o puntuale.

**Definizione 46 (Funzione somma)** Considerando  $S \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$ , l'insieme di convergenza semplice, si ha che in tale insieme resta definita la seguente funzione:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

detta funzione somma.

**Definizione 47 (Successione delle somme parziali)** Essa è definita come la sommatoria dei primi  $n$  termini della serie:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

**Osservazione 13** Definita la funzione somma, e la successione delle somme parziali, si ha che:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

**Definizione 48 (Convergenza semplice o puntuale)** Fissato un punto  $x_0 \in E$ , si dice che la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$  è convergente, se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}(x_0, \varepsilon) : \forall n \geq \bar{n} \quad |R_n(x_0)| < \varepsilon$$

dove  $R_n(x_0) = S(x_0) - S_n(x_0)$ ; da notare che  $\bar{n}$  dipende sia da  $x_0$  che da  $\varepsilon$ .

**Definizione 49 (Definizione di convergenza uniforme)** Una serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  definita in un intervallo  $[a, b]$  e semplicemente convergente in tutti i punti di tale intervallo, viene detta uniformemente convergente se e solo se:

$$\forall \varepsilon \in [a, b] \text{ con } \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \bar{n} \text{ si abbia } |R_n(x)| < \varepsilon$$

Notare che  $\bar{n}(\varepsilon)$  dipende solo da  $\varepsilon$  e non da  $x_0$ .

**Osservazione 14** Geometricamente, la convergenza uniforme, implica che, scelto ad arbitrio  $\varepsilon > 0$ , a partire da un certo  $\bar{n}(\varepsilon)$ , il grafico delle somme parziali  $S_n(x)$  “cade” interamente dentro la striscia compresa tra  $S(x) + \varepsilon$  e  $S(x) - \varepsilon$ ; ovvero  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x)$ .

**Definizione 50 (Insieme di convergenza uniforme)** E' un qualsiasi insieme  $[a, b]$  in cui resti valida la definizione di convergenza uniforme.

**Osservazione 15** Affinché la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  sia uniformemente convergente è necessario che sia, prima, semplicemente convergente; ovvero indicando con  $S$  l'insieme di convergenza semplice e con  $U$  quello di convergenza uniforme si ha che  $U \subseteq S$ .

**Definizione 51 (Convergenza totale)** Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} \bar{x}_n$  una serie a valori in uno spazio completo e normato (spazio di Banach); se la serie delle norme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|\bar{x}_n\|$  è convergente; allora la serie stessa  $\sum_{n=1}^{+\infty} \bar{x}_n$  è convergente.

**Teorema 73 (convergenza assoluta)** Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$  converge, allora  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge. Si dirà che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  è assolutamente convergente.

**Definizione 52 (Insieme di convergenza assoluta)** E' un qualsiasi insieme  $A$  in cui  $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$  sia convergente  $\forall x \in A$ .

**Definizione 53 (Norma del Sup)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni continue in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si dice norma del sup e si indica con  $\|f_n(x)\|_\infty$  la seguente relazione:

$$\|f_n(x)\|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$$

**Teorema 74 (Condizione Sufficiente alla convergenza uniforme)** Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  una serie di funzioni continue in un insieme  $A$ ; se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(x)\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| \quad \text{converge}$$

allora la serie di partenza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{è uniformemente convergente in } A.$$

**Teorema 75 (Condizione Necessaria per la convergenza uniforme)**  
Se la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente in  $U$  allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in U} |f_n(x)| = 0$$

**Teorema 76 (Criterio di Leibniz)** Data una serie di funzioni a segno alternato

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$$

se

$$\forall x \in D \quad 0 < f_{n+1}(x) < f_n(x) \quad (\text{decescente})$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in U} |f_n(x)| = 0$$

allora la serie data converge uniformemente.

**Teorema 77 (Weierstrass)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni reali definite in  $S$ . Se esiste una successione  $C_n \subset \mathbb{R}$ , tale che:

$$1. \quad |f_n(x)| \leq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S$$

$$2. \quad \sum_{n=1}^{+\infty} C_n < +\infty \quad (\text{cioè converge}).$$

allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente in  $S$ .

**Corollario 4 (Convergenza TOTALE)** Data la serie di funzioni definita in  $A$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

si dirà che converge totalmente su  $A$ , se e solo se, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| \text{ è convergente}$$

**Osservazione 16 (sulla convergenza totale)** Supponiamo di avere due serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x) \quad \text{t.c. } |a_n(x)| \leq |b_n(x)|$$

allora la convergenza totale della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$  implica la convergenza totale della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ .

**Teorema 78 (Continuità della somma di una serie di funzioni)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni tutte continue in un intervallo  $[a, b]$ . Se la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  è uniformemente convergente in  $[a, b]$ , allora la somma  $S(x)$  della serie è una funzione continua in  $[a, b]$ .

N.B : da questo teorema, si deduce che una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  non può essere uniformemente convergente in un intervallo in cui  $S(x)$  non sia continua.

**Definizione 54 (Funzione Analitica)** Data una funzione  $f(x)$  definita in  $D \subseteq \mathbb{R}$ , di classe  $C^\infty(D)$ ; essa si dirà Analitica, se la serie di Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad x_0 \in D$$

converge ad  $f(x)$ , cioè se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x)$$

**Teorema 79 (Integrazione per Serie)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni continue in un intervallo  $[a, b]$  e supponiamo che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converga uniformemente alla funzione  $f(x)$ , in  $[a, b]$ , allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

In altre parole, si possono scambiare tra loro le operazioni di somma delle serie e di integrazione, perché la convergenza della serie data, è uniforme.

**Teorema 80 (Derivazione per Serie)** Sia  $\{f_n(x)\}$  una successione di funzioni di classe  $C^1([a, b])$  e supponiamo che le due serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$  convergono uniformemente alle funzioni  $f(x)$  ed  $g(x)$  rispettivamente, allora  $f(x)$  ha derivata continua in  $[a, b]$ , e risulta  $f'(x) = g(x)$ . In generale, se le funzioni  $f_n(x)$  sono derivabili  $n$  volte in  $[a, b]$ ,  $\{f_n \in C^n([a, b])\}$ , e se le serie convergono nel seguente modo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \rightarrow f(x) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k \rightarrow g_1(x) \dots \sum_{k=1}^{+\infty} f_k^{(i)} \rightarrow g_i(x)$$

allora  $f(x) \in C^n([a, b])$  e si ha:

$$f^{(i)}(x) = g_i(x) \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

### 15.3 Serie di potenze in campo reale

**Definizione 55 (Serie di Potenze)** Una serie di potenze del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove  $a_n$  è una successione reale dipendente da  $n$ , ma non da  $x$ , viene detta serie di potenze.

**Osservazione 17** Data  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$  essa si può sempre ricondurre alla serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$  (ponendo  $y = x - x_0$  "traslazione"). Inoltre, essendo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n$$

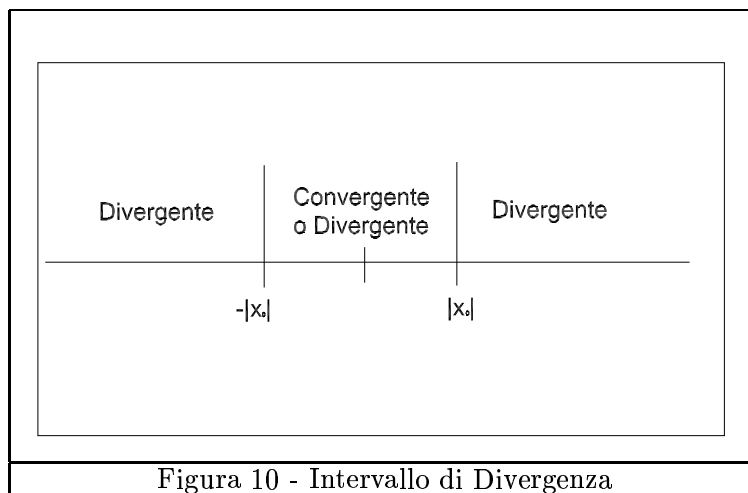
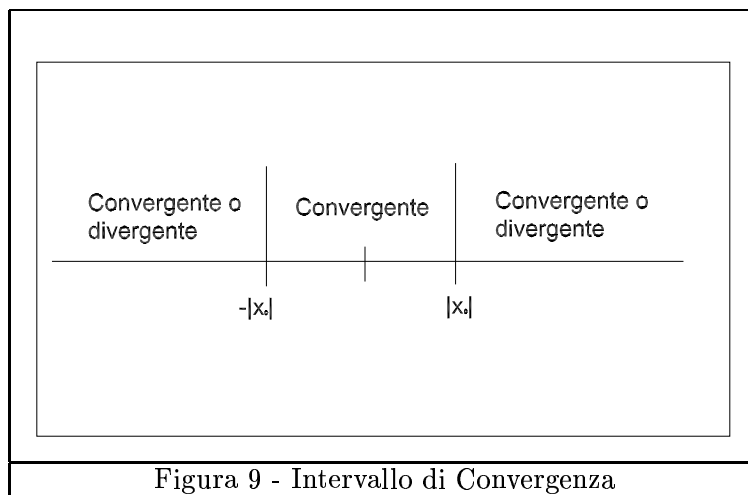
si ha che **tale serie è sempre convergente**, almeno in  $y=0$  (in tale punto ha come somma  $a_0$ ).

**Teorema 81 (Abel 1)** Se una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  è convergente in un punto  $x_0 \neq 0$ , allora la serie medesima è assolutamente convergente in tutti punti  $x$  tale che  $|x| < |x_0|$ . Mentre se una serie di potenze è divergente in un punto  $x_0 \neq 0$ , è divergente in tutti i punti  $x$  tale che  $|x| > |x_0|$ .

**Osservazione 18 (sulle serie di potenze)** *Dai teoremi precedenti, si traggono le seguenti conclusioni:*

- Se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  è **convergente** in un punto  $x_0 \neq 0$ ; allora è convergente nell'intervallo aperto  $(-|x_0|, |x_0|)$ , ma non si può affermare nulla circa il suo comportamento all'esterno di detto intervallo.
- Se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  è **divergente** in  $x_0 \neq 0$ , essa lo è anche nei punti  $|x| > |x_0|$ , ma non si può dire nulla per i punti

$$-|x_0| < x < |x_0|$$



Si ha che l'insieme dei punti  $-|x_0| < x < |x_0|$  per cui la serie converge, ammette estremo superiore  $|E_s|$  e analogamente l'insieme  $|x| > |x_0|$  ammette estremo inferiore  $|E_i|$ ; tali estremi coincidono:

$$|E_s| = |E_i| = R.$$

Il segmento  $(-R, R)$  costituisce l'intervallo o dominio di **convergenza assoluta**. Nei suoi punti interni la serie converge, in quelli esterni diverge, agli estremi può essere convergente o divergente.  $R$  viene denominato **raggio di convergenza assoluta**, e si possono verificare i seguenti casi limite:

- Se  $R=0$  l'intervallo di convergenza si riduce al solo punto  $x_0$ .
- Se  $R = +\infty$  la serie converge in tutti i punti  $x \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 82 (Convergenza uniforme delle serie di potenze)** Una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  è uniformemente convergente in ogni segmento  $(-r, r)$  interamente contenuto nell'intervallo  $(-R, R)$ ; cioè per ogni  $r < R$ .

**Teorema 83 (Abel 2)** Se una serie di potenze converge nell'intervallo  $(-R, R)$ , cioè  $[-R + \delta, R - \delta] \quad \forall \delta > 0$  allora:

- i) Se la serie converge puntualmente (semplicemente) in  $x = +R$  allora converge **uniformemente** su

$$[-R + \delta, +R] \quad \forall \delta > 0.$$

- ii) Se la serie converge puntualmente in  $x = -R$  allora converge **uniformemente** su

$$[-R, R - \delta] \quad \forall \delta > 0.$$

- iii) Se converge puntualmente in  $x = -R$  e  $x = +R$  allora converge uniformemente su  $[-R, +R]$ .

**Teorema 84 (Criterio della radice per determinare R)** Sia data  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  e sia

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|}$$

si ha che:

- se  $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  converge.
- Se  $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  diverge.
- Se  $L = 1 \Rightarrow$  non si può dire nulla

Poniamo  $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

- se  $L < 1 \Rightarrow |x|M < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{M}$
- se  $L > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{M}$



Quindi si ha che

$$R = \frac{1}{M} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

**Teorema 85 (Criterio del rapporto per determinare R)** Sia data  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  e sia  $L = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , si ha che:

- se  $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  converge.
- Se  $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$  diverge.
- Se  $L = 1 \Rightarrow$  non si può dire nulla

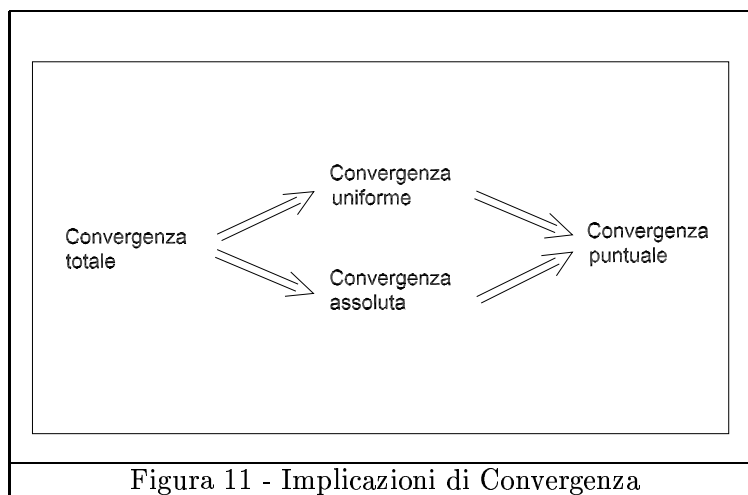
Poniamo  $N = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

- Se  $L < 1 \Rightarrow |x|N < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{N}$
- Se  $L > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{N}$

Quindi si ha che  $R = \frac{1}{N} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$ .

## 15.4 Come studiare le serie di funzioni

### 15.4.1 I legami tra i quattro tipi di convergenza



La direzione delle frecce ci dice che:

- la convergenza puntuale non implica quella uniforme.
- la convergenza uniforme ed assoluta non implicano quella totale.

- la convergenza uniforme ed assoluta non hanno alcun rapporto diretto: se una serie di funzioni converge uniformemente non possiamo dire nulla sulla convergenza assoluta, viceversa se una serie di funzioni converge assolutamente non possiamo dire nulla sulla convergenza uniforme. Esse andranno verificate separatamente!

### 15.4.2 Come procedere nello studio delle serie di funzioni

Guardando lo schema sopra indicato viene spontaneo studiare una serie di funzioni verificando immediatamente se la serie converge totalmente (la convergenza totale implica tutte le altre). Questo in generale non è sempre possibile, quindi dobbiamo partire dal basso.

La cosa che nella maggior parte dei casi conviene fare è studiare la convergenza assoluta dopo di che quella puntuale, poi quella uniforme ed infine quella totale. Per studiare quella totale si procede nel seguente modo: studiamo il sup della funzione  $f_n(x)$  (argomento della serie), cioè verifichiamo, attraverso lo studio della derivata prima rispetto alla  $x$ , per quale intervallo  $A$  chiuso e limitato è crescente la  $f_n(x)$  e quindi su tale intervallo determiniamo il suo sup; se la serie del sup  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in A} f_n(x)$  converge allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  converge totalmente.

Questo modo di procedere si basa sul seguente ragionamento logico. Sia data una serie di funzioni:

1. se la serie converge assolutamente in  $D$ ,  $\forall x \in D$  è necessario che tale serie converga puntualmente  $\forall x \in D$ .
2. se la serie converge uniformemente in  $D$ , è necessario che converga puntualmente  $\forall x \in D$ .
3. se la serie converge totalmente in  $D$  è necessario che la serie converga uniformemente in  $D$  e assolutamente  $\forall x \in D$ .

**Importante:** se una serie di funzioni converge uniformemente in  $D$  non ha senso dire che converge  $\forall x \in D$ . Il motivo è semplice: quando una serie converge uniformemente su un insieme  $D$  essa non converge a dei punti dell'insieme  $D$ , ma la serie converge ad una funzione, cioè la somma delle funzioni della serie tendono ad assumere la forma di una sola funzione. Per la convergenza totale il discorso è analogo.

## Capitolo 16

# Geometria Differenziale

### 16.1 Lunghezza di un arco di curva

**Definizione 56 (Arco di curva Semplice e Regolare)** *Un arco di curva, si dice Semplice e Regolare, quando è l'immagine in  $\mathbb{R}^n$  di una funzione  $\underline{\varphi}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1([a, b])$ , iniettiva, con l'eventuale eccezione  $\underline{\varphi}(a) = \underline{\varphi}(b)$  per le curve chiuse, e tale che  $\|\underline{\dot{\varphi}}(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ .*

Per definire la lunghezza di un arco di curva semplice e regolare, si sfrutta la famiglia di spezzate orientate, inscritte in tale curva.

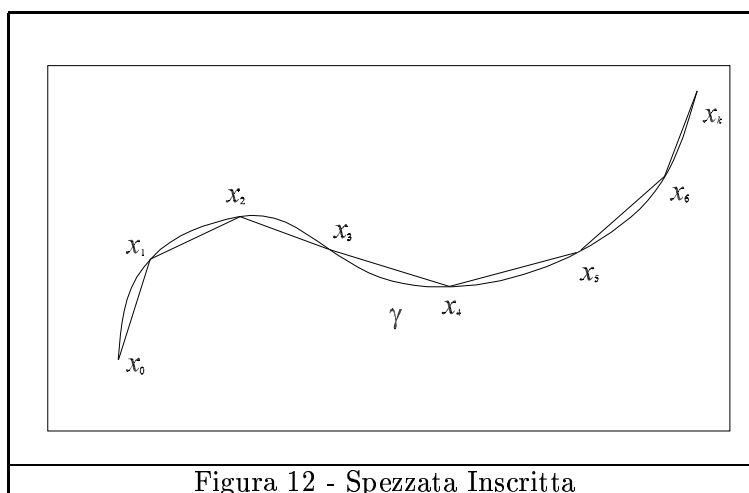
Prendendo una qualsiasi rappresentazione parametrica della curva,  $\underline{\varphi}(t)$ ; si ha che i vertici della spezzata  $(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k)$ , sono dati da

$$\underline{x}_i = \underline{\varphi}(t_i)$$

dove, per l'ordinamento, si pone

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$$

Si denoti con  $S(\gamma)$  l'insieme delle spezzate orientate, inscritte in  $\gamma$ .



**Definizione 57 (Curva Rettificabile)** Data una porzione di curva semplice e regolare aperta  $\gamma$ , si denota con  $L(\sigma)$ , la lunghezza di una spezzata  $\sigma \in S(\gamma)$ .

Si dice che  $\gamma$  è rettificabile, se e solo se l'insieme  $\Gamma = \{L(\sigma) | \sigma \in S(\gamma)\}$ , sia limitato superiormente; cioè sia:  $\text{Sup}\Gamma < +\infty$ , e si avrà che:  $L(\sigma) = \text{Sup}\Gamma$ , cioè la lunghezza di  $\gamma$  è proprio l'estremo superiore di  $\Gamma$ .

Si hanno le seguenti proprietà:

- i)  $L(\gamma) \geq 0$  per ogni curva  $\gamma$  rettificabile.
- ii) Se  $\gamma_1, \gamma_2$  sono due archi di curva rettificabili, con un estremo in comune, e risulta che  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , è un arco di curva semplice e regolare, allora  $\gamma$  è rettificabile, ed è:  $L(\gamma) = L(\gamma_1 \cup \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$

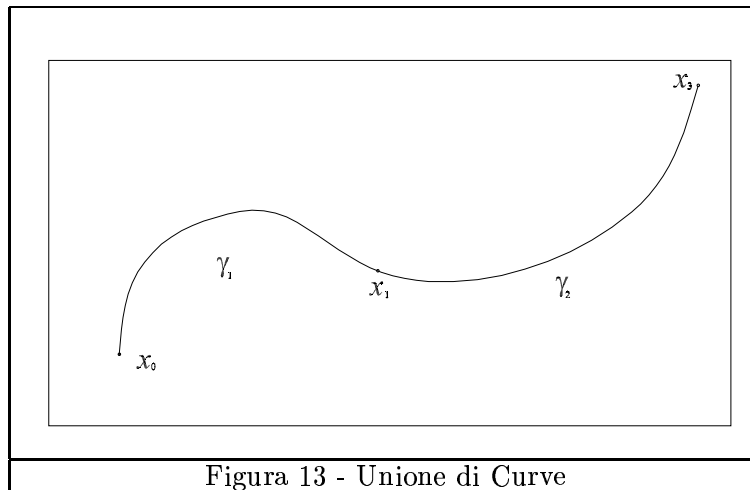


Figura 13 - Unione di Curve

**Teorema 86 (Lunghezza di un arco di curva)** *Sia  $\gamma$  un arco di curva semplice, regolare e rettificabile, allora, per ogni sua rappresentazione parametrica regolare  $\underline{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si ha:*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\underline{\dot{\varphi}}(t)\| dt \quad (16.1)$$

*Di solito si pone*

$$H(t) = \|\underline{\dot{\varphi}}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) \\ \dot{\varphi}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\dot{\varphi}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{\varphi}_2(t)\right)^2 + \dots + \left(\dot{\varphi}_n(t)\right)^2}$$

*quindi, si ha:*

$$L(\gamma) = \int_a^b H(t) dt \quad (16.2)$$

**Definizione 58 (Ascissa Curvilinea)** *Si definisce Ascissa Curvilinea, la funzione Integrale seguente:*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\underline{\dot{\varphi}}(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau$$

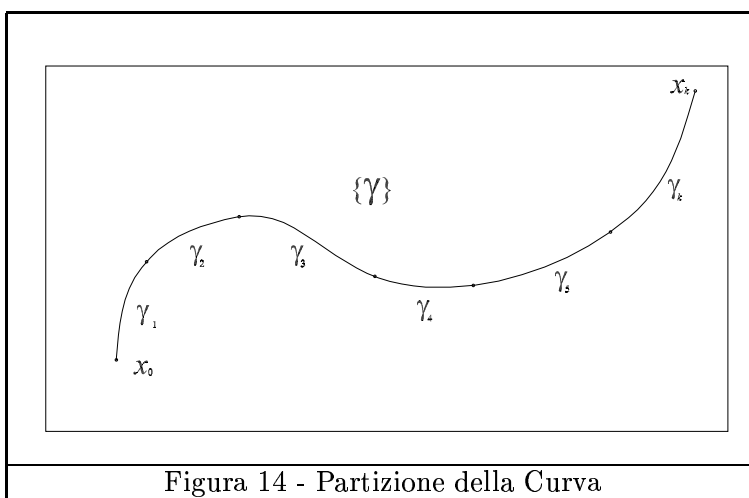
*$s(t)$  è derivabile, strettamente crescente (quindi iniettiva), per cui è invertibile.*

## 16.2 Integrale Curvilineo

**Definizione 59 (Partizione di un Arco di Curva)** Dato un arco di curva Semplice, Regolare e Rettificabile  $\{\gamma\} \in \mathbb{R}^n$ , ed una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , chiameremo partizione  $\mathcal{P}$  dell'arco, la seguente scomposizione di  $\gamma$ :

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$$

Dove i  $\gamma_i$  sono archi di curva semplici e regolari, aventi, al più, a due a due, un estremo in comune.



**Definizione 60 (Somme Integrali)** Fissata una partizione  $\mathcal{P}$  di  $\gamma$ , si definiscono:

$$m_i = \inf_{\underline{x} \in \gamma_i} f(\underline{x}) \quad M_i = \sup_{\underline{x} \in \gamma_i} f(\underline{x})$$

Si definiscono:

- **Somma Integrale per difetto**  $s(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k m_i L(\gamma_i)$
- **Somma Integrale per eccesso**  $S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k M_i L(\gamma_i)$

**Definizione 61 (Integrale Curvilineo)** Sia data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e sia dato un arco di curva semplice, regolare e rettificabile  $\{\gamma\} \in \mathbb{R}^n$ ; si dirà che  $f$  è integrabile lungo  $\gamma$ , se, e solo se, esiste ed è unico, un numero  $\lambda$ , tale che

$$s(\mathcal{P}) \leq \lambda \leq S(\mathcal{P}) \quad \forall \text{ partizione } \mathcal{P} \text{ di } \gamma$$

Il numero  $\lambda$  si chiamerà **Integrale curvilineo** di  $f$  lungo  $\gamma$ , e si indicherà con:

$$\lambda = \int_{\gamma} f(\underline{x}) ds$$

Da notare che ‘ $ds$ ’ è una porzione infinitesima di  $\gamma$ .

**Definizione 62 (Integrale Curvilineo Orientato)** *Scelto uno dei due possibili orientamenti della curva  $\gamma$ , e fissati  $\underline{x}_1$  e  $\underline{x}_2$ , gli estremi di tale curva; si definisce Integrale Curvilineo Orientato, il seguente integrale:*

$$\int_{\gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_2)} f(\underline{x}) ds \quad (\text{Si percorre } \gamma \text{ da } \underline{x}_1 \text{ a } \underline{x}_2)$$

**Osservazione 19** *Si ha che:*

$$\int_{\gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_2)} f(\underline{x}) ds = - \int_{\gamma(\underline{x}_2, \underline{x}_1)} f(\underline{x}) ds$$

**Teorema 87 (Calcolo dell’integrale curvilineo)** *Sia data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile lungo l’arco di curva semplice, regolare e rettificabile  $\gamma$ , di estremi  $\underline{x}_1$  e  $\underline{x}_2$ ; e sia data una sua qualsiasi rappresentazione parametrica regolare:*

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{\varphi}(t) \\ t \in [a, b] \\ \underline{\varphi}(a) = \underline{x}_1 \\ \underline{\varphi}(b) = \underline{x}_2 \end{cases}$$

Allora si ha:

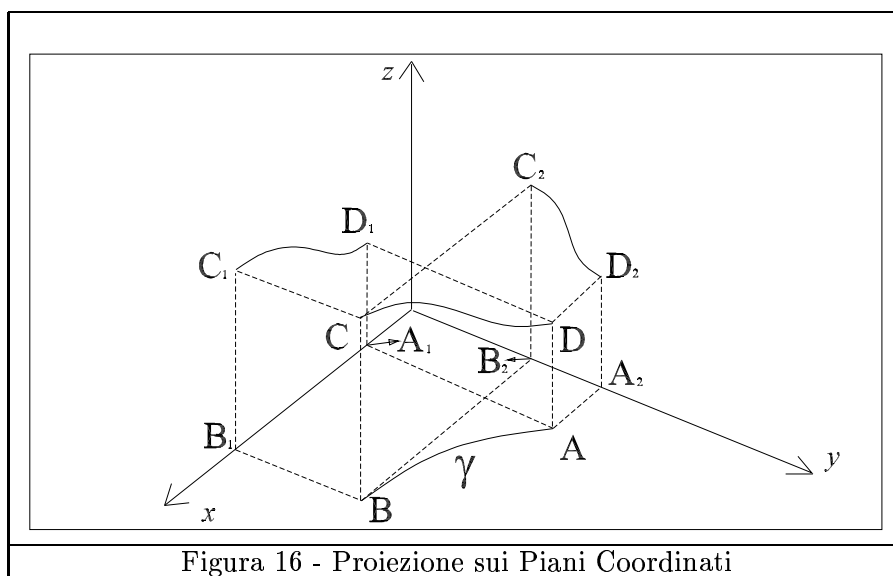
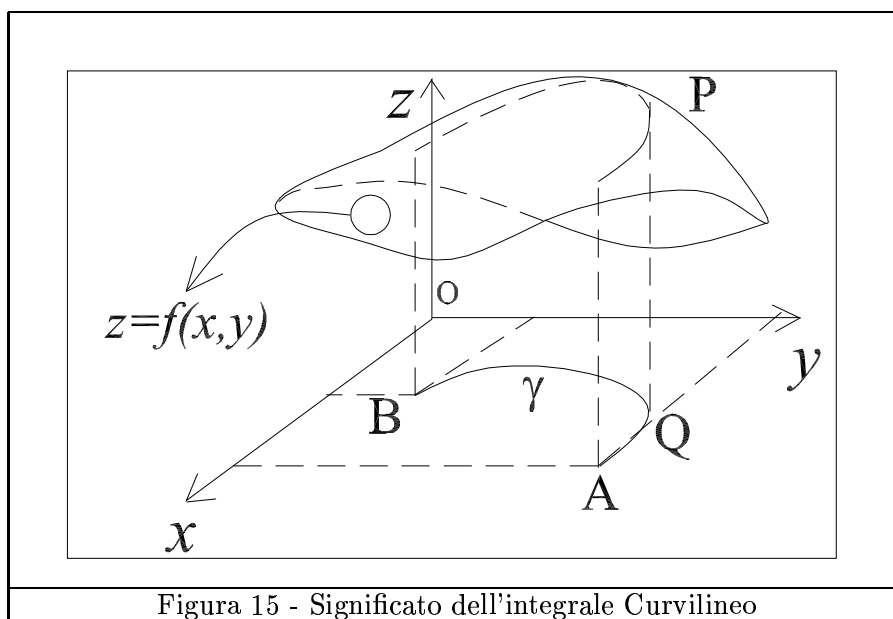
$$\int_{\gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_2)} f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(\underline{\varphi}(t)) \cdot \|\dot{\underline{\varphi}}(t)\| dt$$

O equivalentemente:

$$\int_{\gamma(\underline{x}_1, \underline{x}_2)} f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(\underline{\varphi}(t)) \cdot H(t) dt$$

### 16.2.1 Interpretazione Geometrica dell’integrale curvilineo

Se la funzione integranda, è una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , il grafico di  $z = f(x, y)$  è una superficie in  $\mathbb{R}^3$ .



L'integrale curvilineo, rappresenta l'area della superficie delimitata da  $\gamma$  e da  $z = f(x, y)$  (Vedi figure 16.2.1 e 16.2.1)

- $\int_{\gamma} f(x, y) dx = \text{Superficie } A_1, B_1, C_1, D_1$
- $\int_{\gamma} f(x, y) dy = \text{Superficie } A_2, B_2, C_2, D_2$
- $\int_{\gamma} f(x, y) ds = \text{Superficie } A, B, C, D$



### 16.3 Integrali di Linea

Se si considera un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^n$ , ed un arco di curva semplice, regolare e rettificabile  $\gamma$ ; disponendo del vettore  $\tau$ , tangente, punto per punto la curva  $\gamma$ ; è lecito calcolare l'integrale curvilineo della funzione scalare, che si ottiene moltiplicando scalarmente il campo vettoriale dato, con il vettore  $\tau$ . Questo tipo di integrale prende il nome di:

**Definizione 63 (Integrale di Linea)** Sia  $\underline{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale, e sia  $\gamma$  un arco di curva semplice e regolare e rettificabile; si definisce *Integrale di Linea di  $\underline{F}$  su  $\gamma$* , il seguente integrale curvilineo:

$$\int_{\gamma} \underline{F}(\underline{x}) \cdot \underline{\tau} ds = \int_{\gamma} \underline{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{s}$$

dove  $\underline{\tau}$  è il versore tangente la curva  $\gamma$  in  $\underline{x}$

**Definizione 64 (Circuitazione)** Se  $\gamma$  è una curva chiusa, l'integrale di linea, prende il nome di *Circuitazione del campo  $\underline{F}$  su  $\gamma$* .

**Osservazione 20 (Versore Tangente)** Il versore  $\underline{\tau}$  è dato da:

$$\underline{\tau} = \frac{\dot{\underline{\varphi}}(t)}{\|\dot{\underline{\varphi}}(t)\|}$$

Dove  $\underline{\varphi}(t)$  è una qualunque rappresentazione parametrica regolare della curva  $\gamma$ .

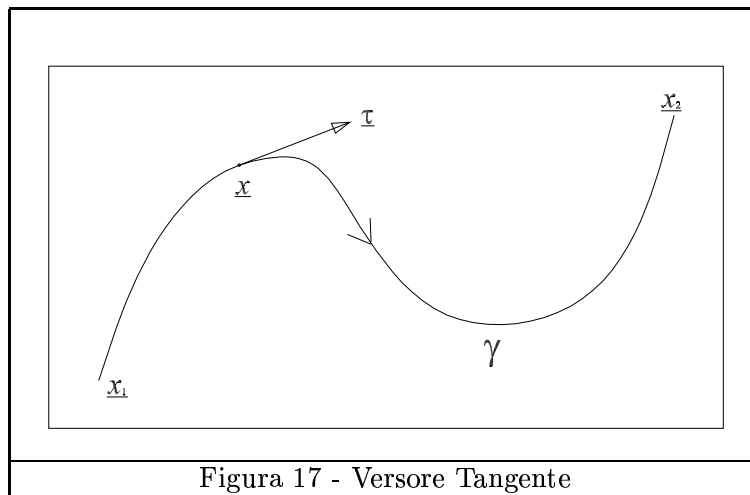


Figura 17 - Versore Tangente

**Teorema 88 (Calcolo dell'integrale di Linea)** *Data una qualsiasi rap-*

*presentazione parametrica regolare di  $\gamma$ :*  $\begin{cases} \underline{x} = \underline{\varphi}(t) \\ t \in [a, b] \\ \underline{x}_1 = \underline{\varphi}(a) \\ \underline{x}_2 = \underline{\varphi}(b) \end{cases}$  *Si ha:*

$$\int_{\gamma} \underline{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{F}(\underline{\varphi}(t)) \cdot \underline{\dot{\varphi}}(t) dt$$

*Dove il prodotto è inteso come prodotto scalare, trattandosi di Vettori.*

## 16.4 Integrale Doppio

**Definizione 65 (Integrale Doppio)** *Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  il cui contorno (frontiera), sia la curva chiusa  $\gamma$ ; e sia  $f$  definita, e continua in tutto  $H$ .*

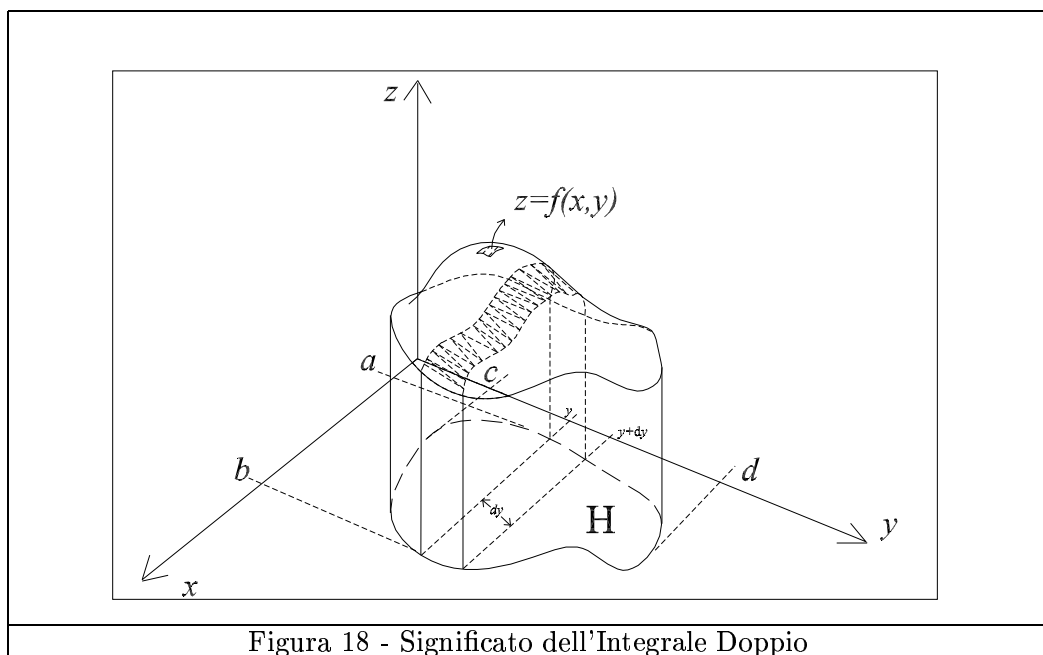
*Si definisce Integrale Doppio esteso al campo  $H$ , o Integrale di Campo, il seguente integrale:*

$$\iint_H f(x, y) dx dy$$

*O, equivalentemente:*

$$\iint_H f(x, y) d\sigma$$

*(dove  $d\sigma$  è l'elemento infinitesimo di superficie  $dx dy$ ). L'integrale doppio, rappresenta il volume del cilindroide indicato in figura.*



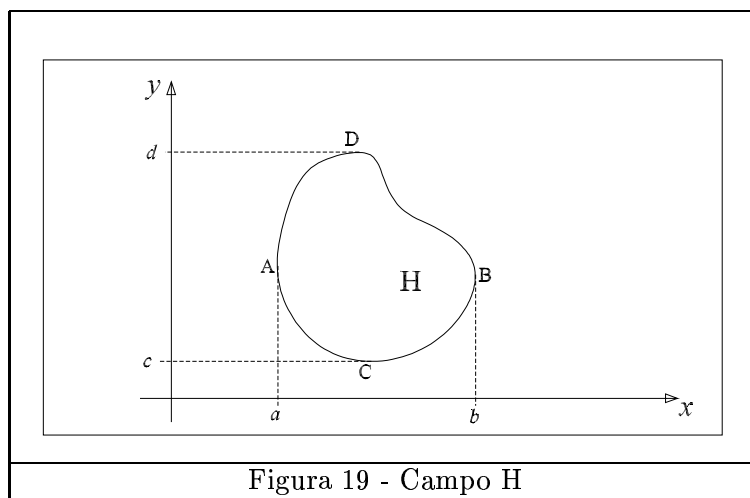
### 16.4.1 Calcolo dell'Integrale Doppio

Sia  $\gamma$  la curva chiusa che rappresenta la frontiera di  $H$ ; supponiamo di poter rappresentare tale curva mediante le seguenti funzioni nella variabile  $y$ :

$$\begin{cases} x = \psi_1(y) & \text{Tratto (CAD)} \\ x = \psi_2(y) & \text{Tratto (CBD)} \end{cases}$$

Oppure mediante le funzioni nella variabile  $x$ :

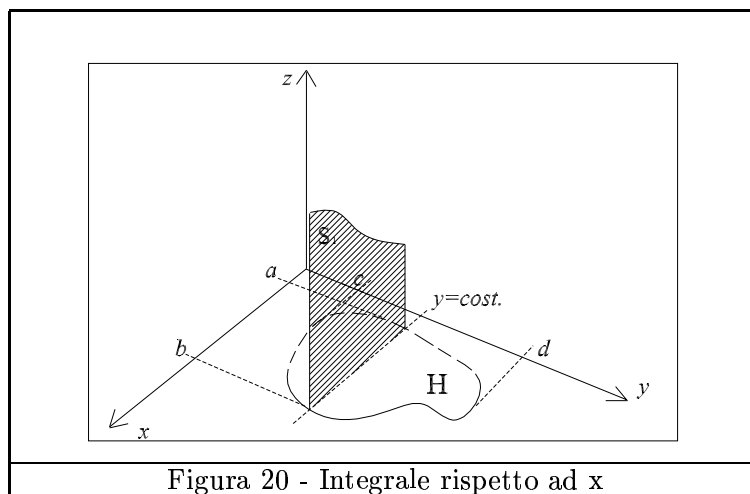
$$\begin{cases} y = \varphi_1(x) & \text{Tratto (ACB)} \\ y = \varphi_2(x) & \text{Tratto (ADB)} \end{cases}$$



Allora, l'integrale

$$g(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

è l'integrale rispetto ad  $x$ , e rappresenta  $S_1$ .



Mentre l'integrale

$$h(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

è l'integrale rispetto ad  $y$ , e rappresenta  $S_2$ .

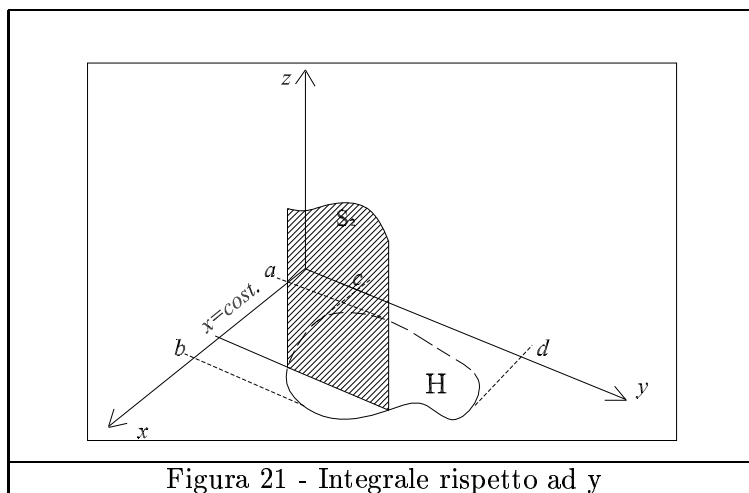


Figura 21 - Integrale rispetto ad  $y$

Per calcolare l'integrale doppio

$$\iint_H f(x, y) dx dy$$

si può agire nei due seguenti modi:

i) Integrando, prima rispetto ad  $x$ :

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

ii) Integrando, prima rispetto ad  $y$ :

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Queste formule, sono denominate, **Formule di Riduzione**, e sono valide se  $f(x, y)$  è una funzione continua in  $H$  (Anche se non è strettamente necessario che  $f(x, y)$  sia continua, è sufficiente che sia Integrabile in  $H$ ).

**Osservazione 21** Se il problema, è calcolare il volume ( $V$ ) del cilindroide di campo  $H$ , è necessario suddividere la casistica nei seguenti tre casi:

1.  $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H$  si ha  $f(x, y) \geq 0$  Allora si ha:

$$V = \iint_H f(x, y) dx dy \geq 0$$

2.  $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H$  si ha  $f(x, y) \leq 0$  Allora si ha:

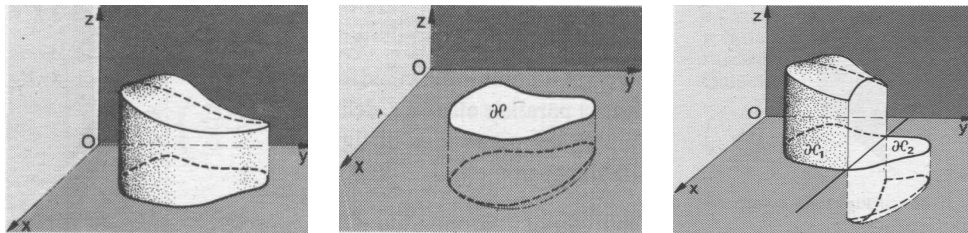
$$V = - \iint_H f(x, y) dx dy \geq 0$$

3.  $H = H_1 \cup H_2 : \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H_1$  si ha  $f(x, y) \geq 0$  e  
 $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H_2$  si ha  $f(x, y) < 0$ . Allora si ha:

$$V = \iint_{H_1} f(x, y) dx dy - \iint_{H_2} f(x, y) dx dy \geq 0$$

Se, invece si accetta come convenzione, che il volume sia negativo quando  $f(x, y) \leq 0$ , allora si calcola, semplicemente:

$$V = \iint_H f(x, y) dx dy$$



**Osservazione 22 (Area del Campo H)** Se indichiamo con  $S$  la superficie rappresentata da  $H$ , si ha:

$$S = \iint_H dx dy$$

Questo è un caso particolare, che si verifica quando  $f(x, y) = 1$ .

**Teorema 89 (Cambio di variabili di Integrazione)** Sia data la funzione continua  $f(x, y)$ , e si voglia calcolare l'integrale doppio

$$\iint_H f(x, y) dx dy$$

sostituendo le variabili  $x, y$ , con le variabili  $u, v$ ; per le quali sussistano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

Avendo  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H$  e  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H_1$ , con  $H, H_1 \subseteq \mathbb{R}^2$  il passaggio dalle coordinate  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  a quelle  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , equivale al passaggio da  $H$  ad  $H_1$ . Si ha che:

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \iint_{H_1} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |J| du dv$$

Dove

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Da notare che  $|J|$  è il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana della funzione  $\underline{g}: H_1 \rightarrow H$ , definita da:  $\underline{g}(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ .

**Osservazione 23 (Passaggio a coordinate polari)** Si ponga

$$\underline{g}(\rho, \theta) = (\varphi(\rho, \theta), \psi(\rho, \theta))$$

con

$$\begin{cases} x = \varphi(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ y = \psi(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

si ha:

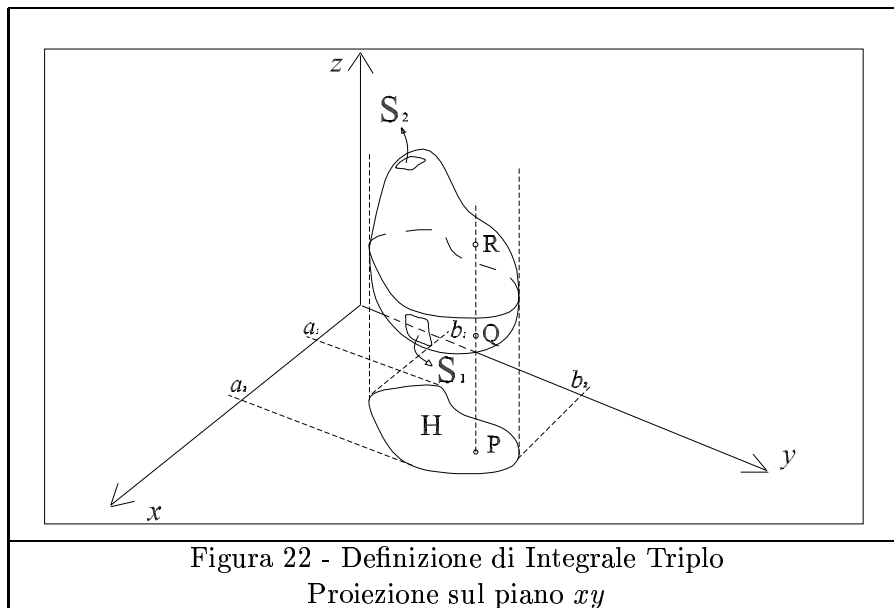
$$\iint_H f(x, y) dx dy = \iint_{H_1} f(\varphi, \psi) \rho d\rho d\theta$$

Da notare la trasformazione:  $dx dy \rightarrow \rho d\rho d\theta$ .

## 16.5 Integrale Triplo

**Definizione 66 (Integrale Triplo)** Si consideri  $S$ , una superficie tridimensionale, ed il solido da essa racchiuso, e sia  $V$  l'insieme dei punti del solido racchiuso da  $S$ .

Sia, inoltre,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x, y, z)$  definita e continua  $\forall (x, y, z) \in V$ .



Essendo  $f$  continua in  $V$ , allora esiste l'integrale:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Dove si è posto:  $\begin{cases} z = \varphi_1(x, y) & (\text{funzione che descrive } S_1) \\ z = \varphi_2(x, y) & (\text{funzione che descrive } S_2) \end{cases}$

Si costruisce, quindi, la funzione integrale data da:

$$g(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Essendo  $g(x, y)$  definita e continua in  $H$ , allora esiste l'integrale doppio:

$$\iint_H g(x, y) dx dy = \iint_H \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dx dy dz \triangleq \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

E viene denominato **Integrale Triplo** di campo  $V$  della funzione  $f(x, y, z)$ .

### 16.5.1 Calcolo dell'Integrale Triplo

Si ponga

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Tale integrale può essere calcolato in sei modi diversi, ma equivalenti:

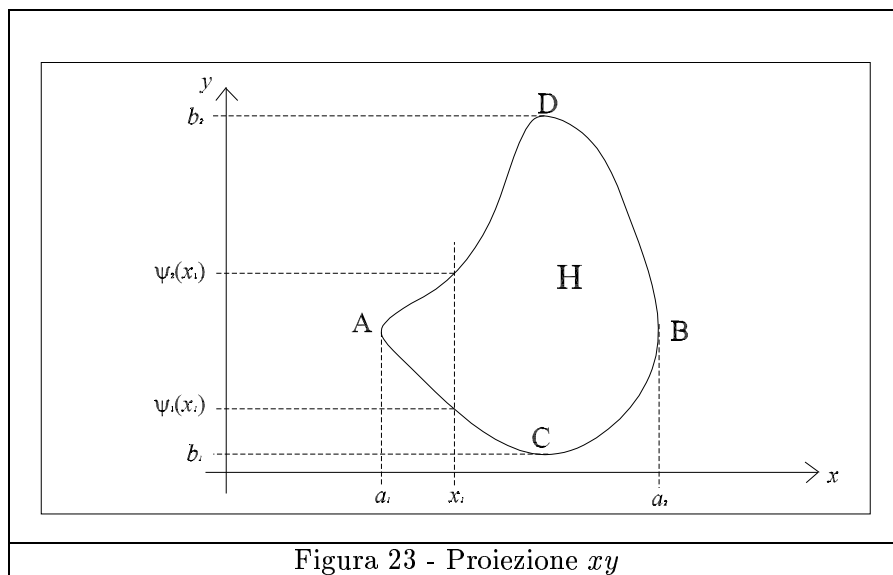
**\* Se  $S_1$  ed  $S_2$  si proiettano sul piano  $xy$  (Vedi Figura 66) \***

A)

$$I = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

Dove si è posto:  $\begin{cases} z = \varphi_1(x, y) & \text{(funzione che descrive } S_1) \\ z = \varphi_2(x, y) & \text{(funzione che descrive } S_2) \end{cases}$

ed  $\begin{cases} y = \psi_1(x) & \text{(funzione che descrive il tratto ACB)} \\ y = \psi_2(x) & \text{(funzione che descrive il tratto ADB)} \end{cases}$

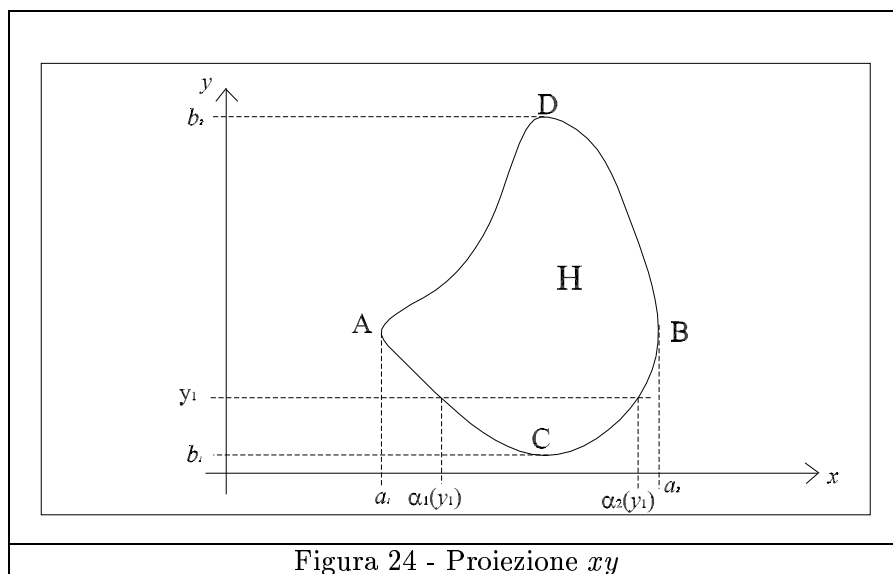


B)

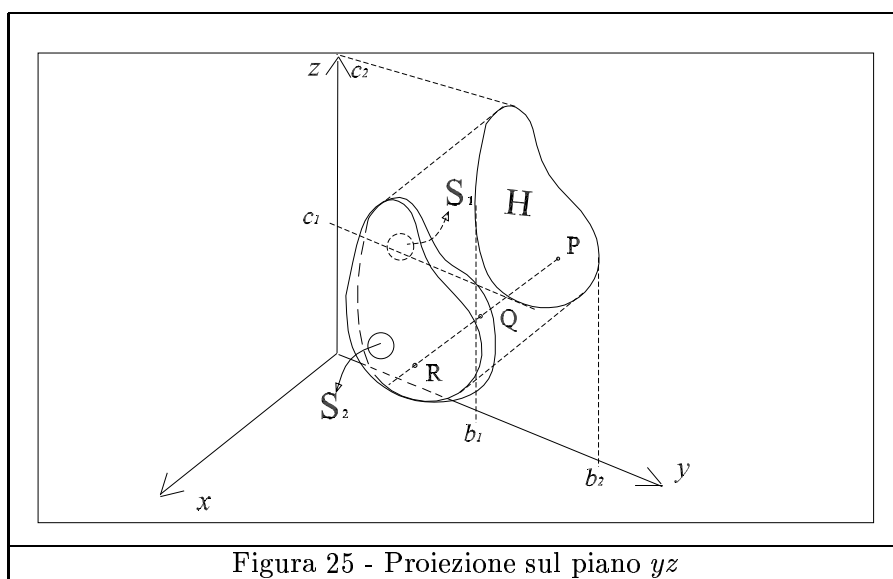
$$I = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

Dove si è posto  $\begin{cases} x = \alpha_1(y) & \text{(funzione che descrive il tratto CAD)} \\ x = \alpha_2(y) & \text{(funzione che descrive il tratto CBD)} \end{cases}$





\* Se  $S_1$  ed  $S_2$  si proiettano sul piano  $yz$  \*

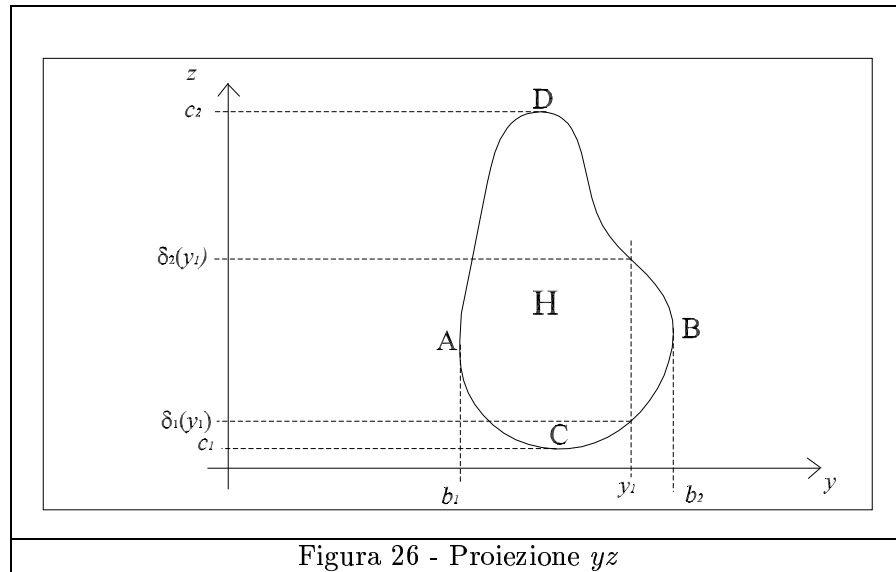


C)

$$I = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\delta_1(y)}^{\delta_2(y)} dz \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x, y, z) dx$$

Dove si è posto:  $\begin{cases} x = \varphi_1(y, z) & \text{(funzione che descrive } S_1) \\ x = \varphi_2(y, z) & \text{(funzione che descrive } S_2) \end{cases}$

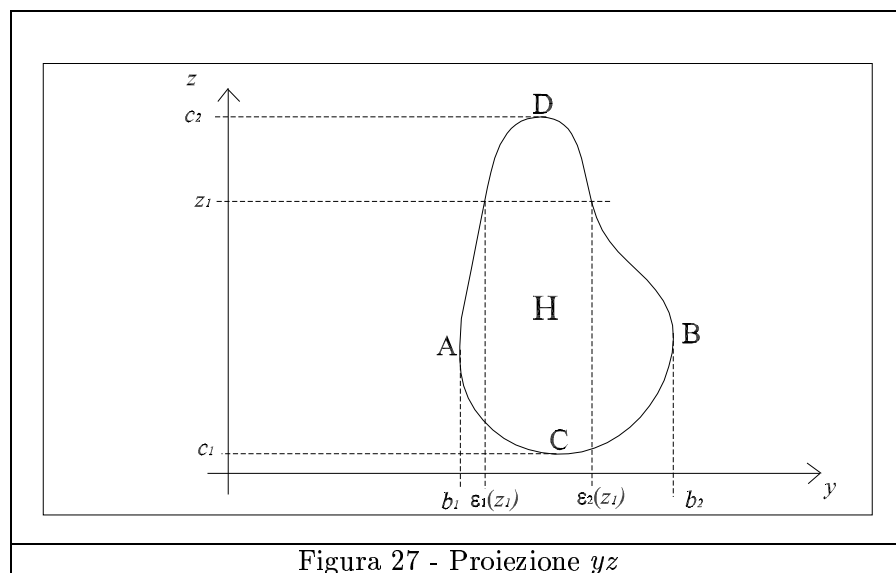
ed  $\begin{cases} z = \delta_1(y) & \text{(funzione che descrive il tratto ACB)} \\ z = \delta_2(y) & \text{(funzione che descrive il tratto ADB)} \end{cases}$



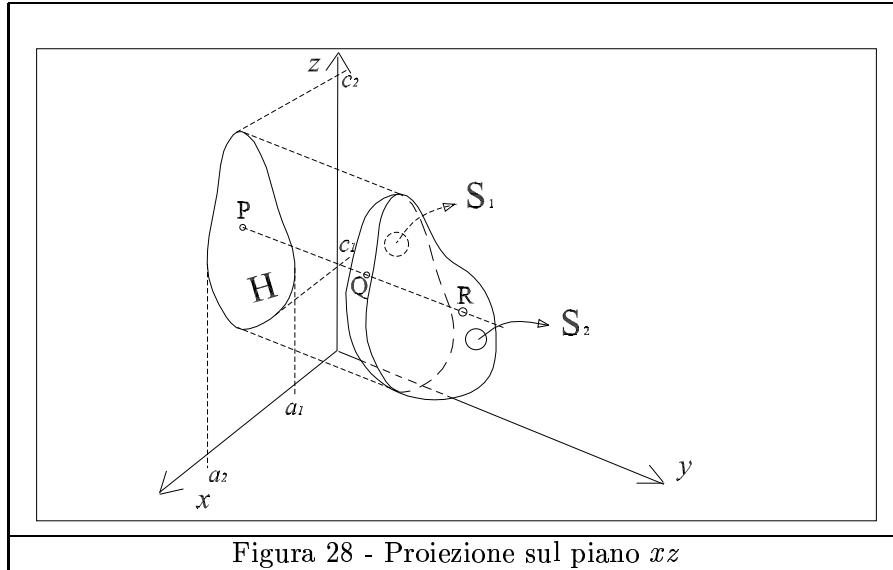
D)

$$I = \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{\epsilon_1(z)}^{\epsilon_2(z)} dy \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z) dx$$

Dove si è posto  $\begin{cases} y = \epsilon_1(z) & \text{(funzione che descrive il tratto CAD)} \\ y = \epsilon_2(z) & \text{(funzione che descrive il tratto CBD)} \end{cases}$



\* Se  $S_1$  ed  $S_2$  si proiettano sul piano  $xz$  \*

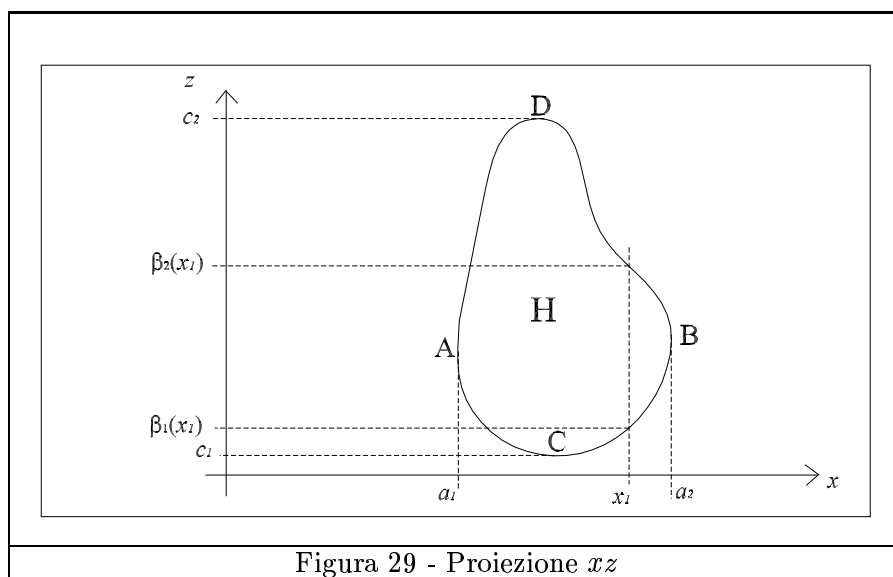


E)

$$I = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\beta_1(x)}^{\beta_2(x)} dz \int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x,y,z) dy$$

Dove si è posto:  $\begin{cases} y = \varphi_1(x,z) & \text{(funzione che descrive } S_1) \\ y = \varphi_2(x,z) & \text{(funzione che descrive } S_2) \end{cases}$

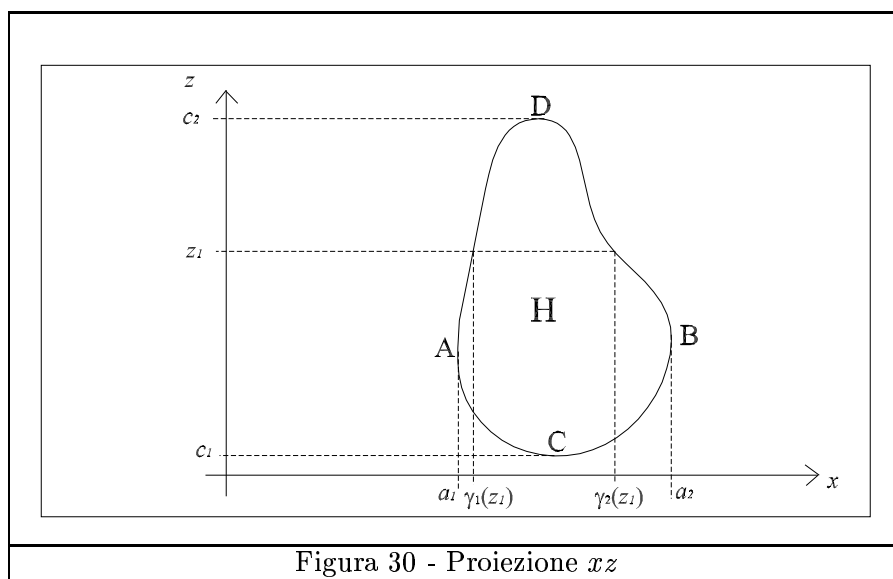
ed  $\begin{cases} z = \beta_1(x) & \text{(funzione che descrive il tratto ACB)} \\ z = \beta_2(x) & \text{(funzione che descrive il tratto ADB)} \end{cases}$



F)

$$I = \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{\gamma_1(z)}^{\gamma_2(z)} dx \int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x, y, z) dy$$

Dove si è posto  $\begin{cases} x = \gamma_1(z) & \text{(funzione che descrive il tratto CAD)} \\ x = \gamma_2(z) & \text{(funzione che descrive il tratto CBD)} \end{cases}$



**Osservazione 24 (Volume di un Solido)** Se  $f(x, y, z) = 1$ , si ha:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = \iiint_V dV = V$$

e rappresenta il volume del solido delimitato dalla superficie  $S$ .

**Teorema 90 (Cambio di Variabili di Integrazione)** Sia

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

l'Integrale triplo da calcolare. Si ponga:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \eta(u, v, w) \end{cases}$$

Dove le tre funzioni  $\varphi, \psi, \eta$ , siano funzioni biunivoche nelle variabili  $u, v, w$ ; allora si ha:

$$I = \iiint_{V_1} f(\varphi, \psi, \eta) |J| du dv dw$$

come al solito:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Da questa regola, seguono le regole per il passaggio a coordinate **Sferiche** e **Cilindriche**:

**Osservazione 25 (Passaggio a Coordinate Sferiche)**

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\theta) \\ 0 \leq \rho \leq r \quad (\text{Raggio della Sfera}) \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{Vedi Figura 25})$$

Da notare la trasformazione:  $dV = dx dy dz \rightarrow \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\varphi d\theta$

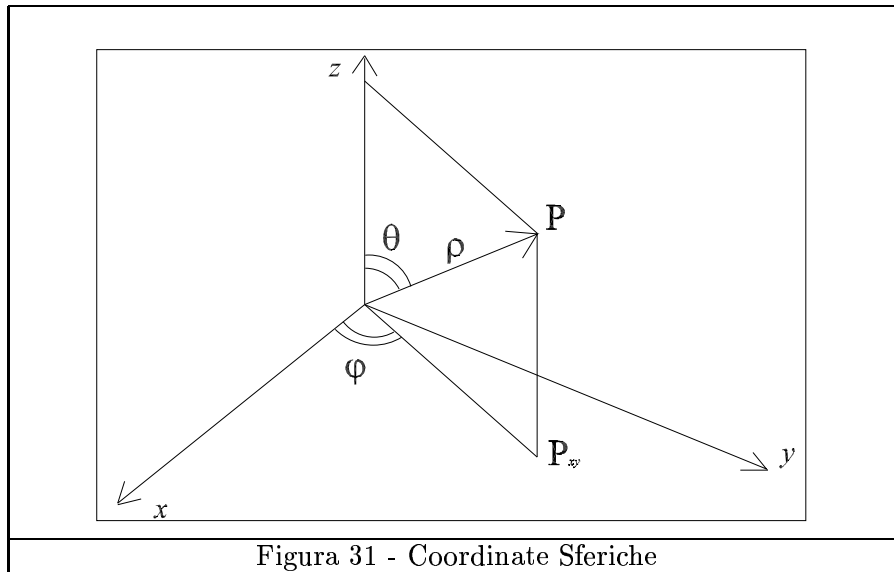


Figura 31 - Coordinate Sferiche

**Osservazione 26 (Passaggio a Coordinate Cilindriche)**

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \\ 0 \leq \rho \leq r \quad (\text{Raggio del Cilindro}) \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{Vedi Figura 26})$$

Da notare la trasformazione:  $dV = dx dy dz \rightarrow \rho d\rho d\varphi dz$

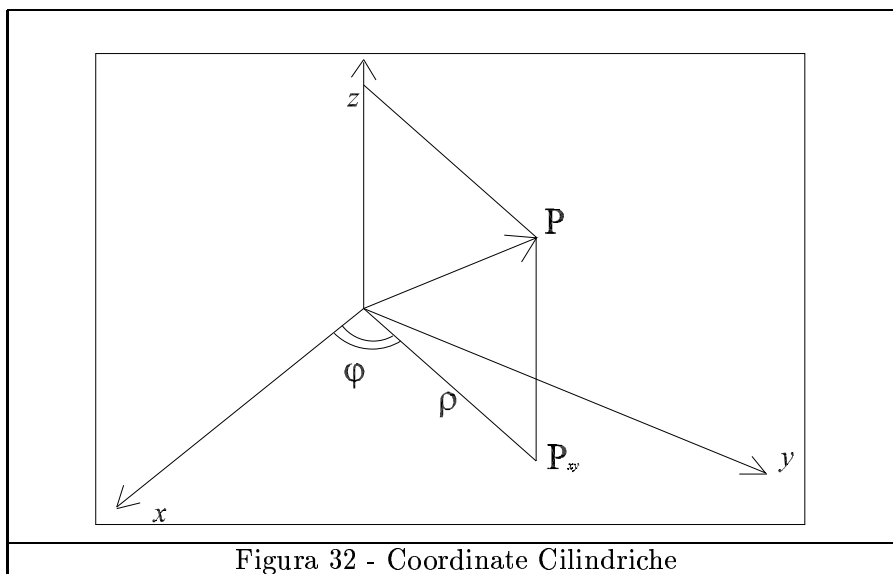


Figura 32 - Coordinate Cilindriche

## 16.6 Integrale di Superficie

**Definizione 67 (Integrale di Superficie)** Data una porzione di superficie curva, semplice e regolare,  $\Sigma \in \mathbb{R}^3$  ed una funzione  $R(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita e continua in tutti i punti di  $\Sigma$ ; si definisce “Integrale di Superficie” il seguente integrale:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) d\sigma$$

dove  $d\sigma$  è un elemento infinitesimo di superficie, appartenente a  $\Sigma$ .

### 16.6.1 Calcolo dell'integrale di Superficie

Sia  $\underline{\varphi}(\underline{u}) = (\varphi_1(\underline{u}), \varphi_2(\underline{u}), \varphi_3(\underline{u}))$ , dove  $\underline{u} = (u, v) \in D$ , una qualunque rappresentazione parametrica di  $\Sigma$ , iniettiva, di classe  $C^1(D)$  e tale che  $\text{Car}(J_{\underline{\varphi}}) = 2$ ; si ha che:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) d\sigma = \iint_D R(\underline{\varphi}(\underline{u})) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} du dv$$

dove, ponendo:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ 1 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ 1 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$J_1, J_2$  e  $J_3$ , sono rispettivamente gli Aggiunti  $1 - 1, 2 - 1$  e  $3 - 1$  della matrice  $J$ ; ovvero:

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \quad J_2 = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \quad J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Si può dimostrare che il vettore  $\underline{J} = (J_1, J_2, J_3)$ , è ortogonale, punto per punto, alla superficie  $\Sigma$ .

Se, al posto della rappresentazione parametrica di  $\Sigma$ , venisse data l'equazione cartesiana  $F(x, y, z) = 0$ , si avrebbe uno dei seguenti casi:

- A) nella  $F(x, y, z) = 0$  si può esplicitare  $z$  in funzione di  $x, y$ ; cioè  $z = f(x, y)$ . Si può immaginare

$$\underline{\varphi} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

e quindi  $J_1 = -\frac{\partial f}{\partial x}$   $J_2 = -\frac{\partial f}{\partial y}$   $J_3 = 1$ .

Considerando che  $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ , si ha che  $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial F}{\partial z} = 1$ .

In definitiva, ponendo

$$I_\Sigma = \iint_\Sigma R(x, y, z) d\sigma$$

si ha:

$$I_\Sigma = \iint_D \left[ R(x, y, f(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 1} \right] dx dy$$

- B) nella  $F(x, y, z) = 0$  si può esplicitare  $x$  in funzione di  $y, z$ ; cioè  $x = g(y, z)$ .

Con considerazioni analoghe alle precedenti, si avrebbe:

$$I_\Sigma = \iint_D \left[ R(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \right] dy dz$$

- C) nella  $F(x, y, z) = 0$  si può esplicitare  $y$  in funzione di  $x, z$ ; cioè  $y = h(x, z)$ .

Con considerazioni analoghe alle precedenti, si avrebbe:

$$I_\Sigma = \iint_D \left[ R(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \right] dx dz$$

**Parte III**

**Analisi Matematica III**



## Capitolo 17

# Forme Differenziali

### 17.1 Forme e Relazioni Generali

**Definizione 68 (1-forma)** Dato l'integrale di linea  $\int_{\gamma} \underline{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{s}$ , poniamo:

$$d\underline{s} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \varphi'_2(t) \\ \varphi'_3(t) \\ \dots \\ \varphi'_n(t) \end{pmatrix} dt \quad \text{ed anche} \quad F_i = F_i(\underline{\varphi}(t)) \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Si ha:

$$\int_{\gamma} \underline{F}(\underline{x}) \cdot d\underline{s} = \int_a^b F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 + \dots + F_n dx_n$$

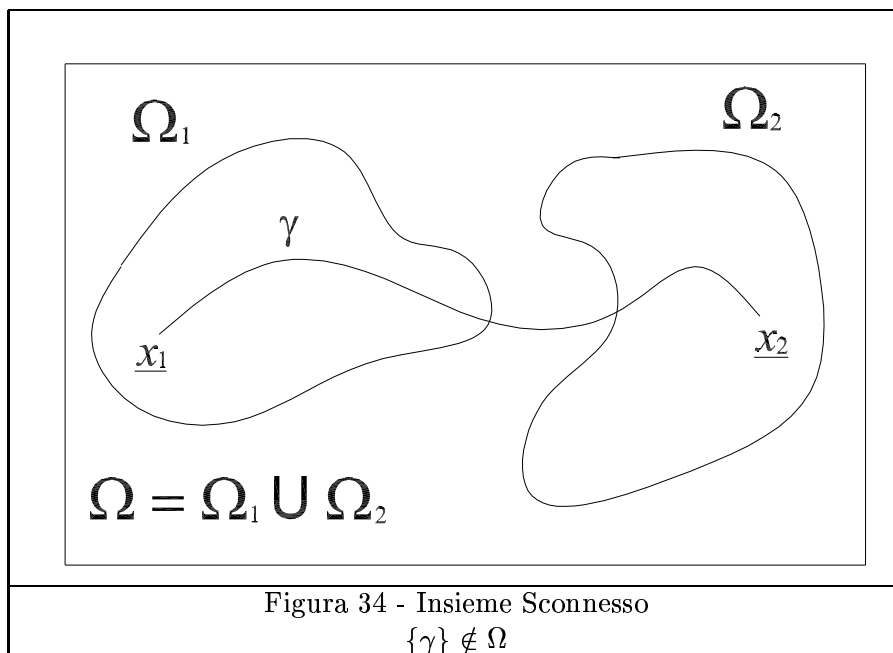
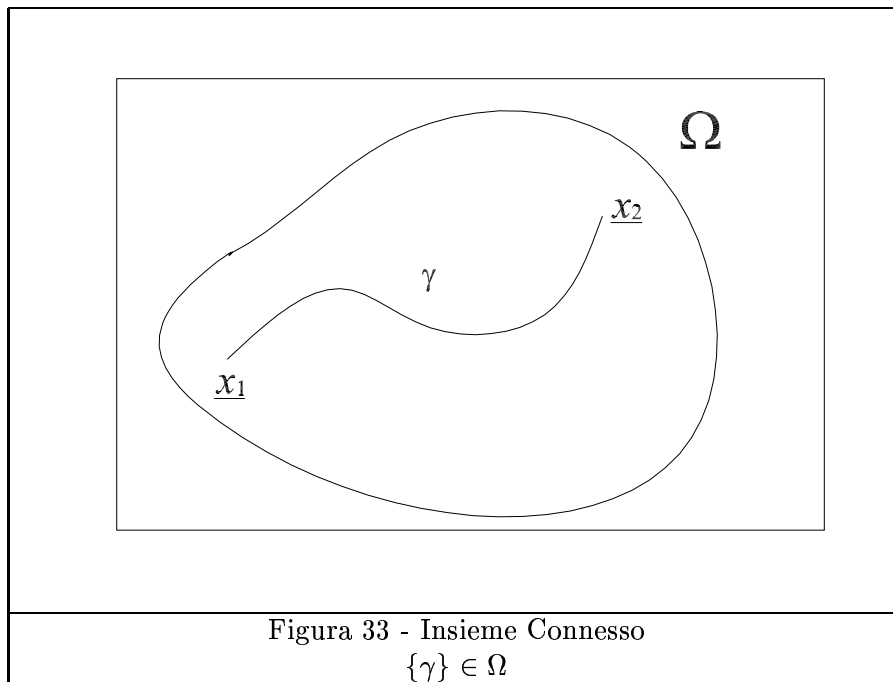
L'espressione

$$\omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 + \dots + F_n dx_n$$

prende il nome di **Forma differenziale lineare del primo ordine**, oppure **1-forma**.

**Definizione 69 (Forma differenziale Esatta)** Se esiste una funzione scalare  $f$  tale che  $df = \omega$ ; si dice che la forma  $\omega$  è esatta, e la funzione  $f$  prende il nome di *Primitiva* della 1-forma  $\omega$ .

**Definizione 70 (Insieme Connesso)** Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice *Connesso*, se per ogni coppia di punti  $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \Omega$ , esiste una curva, interamente contenuta in  $\Omega$ , che li unisca. (Vedi figure seguenti).



**Definizione 71 (Potenziale Scalare)** Sia dato un campo vettoriale  $\underline{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definito in un aperto Connesso  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ; si dirà che la funzione scalare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è un Potenziale Scalare di  $\underline{F}$ , se, e solo se,

$$\nabla f = \underline{F}$$

**Osservazione 27** Se  $f(\underline{x})$  è il potenziale del campo  $\underline{F}$ , allora anche  $f(\underline{x}) + c$  con “ $c$ ” costante, è un potenziale di  $\underline{F}$ .

**Osservazione 28** Se  $\nabla f(\underline{x}) = \underline{F}$  allora:

$$\underline{F} \in C^k(\Omega) \Rightarrow f(\underline{x}) \in C^{k+1}(\Omega)$$

**Teorema 91 (Condizione necessaria all'esistenza del Potenziale)** Sia  $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , un campo vettoriale di classe  $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$ , e sia  $\gamma$  un qualsiasi arco di curva semplice, regolare e rettificabile, di estremi  $\underline{x}_1$  e  $\underline{x}_2$ . Se  $\underline{F}$  ammette potenziale scalare  $f$ , allora valgono le seguenti condizioni:

$$i) \partial_j F_i(\underline{x}) = \partial_i F_j(\underline{x}) \text{ (con } i, j = 1, \dots, n)$$

$$ii) \int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{s} = f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1)$$

**Osservazione 29** Il precedente teorema si traduce dicendo che: condizione necessaria affinché  $\underline{F}$  ammetta potenziale scalare è che  $\underline{F}$  sia **Irrotazionale**, cioè

$$\text{rot}(\underline{F}) = 0^{[1]}$$

**Osservazione 30** Se  $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cioè  $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{F}(x, y) = (F_1(x, y); F_2(x, y))$ , allora

$$\text{rot}(\underline{F}) = 0 \Rightarrow \partial_y F_1 = \partial_x F_2$$

**Osservazione 31 (Se  $\Omega$  è Sconnesso)** Se l'insieme di esistenza  $(\Omega)$  di  $\underline{F}$  non è Connesso, non si può esprimere il potenziale scalare in senso globale, ma va calcolato (se esiste) in ciascuna delle componenti connesse che costituiscono  $\Omega$ , ricordando che **non è possibile collegare ciò che accade in una componente connessa, con ciò che accade in un'altra**.

**Definizione 72 (Divergenza)** Dato un campo vettoriale  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$  dove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è l'insieme di definizione di  $\underline{F}$ , si definisce **Divergenza** di  $\underline{F}$  il seguente Scalare:

$$\text{div}(\underline{F}) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i = \partial_{x_1} F_1 + \partial_{x_2} F_2 + \dots + \partial_{x_n} F_n$$

Considerando  $\bar{\nabla}$  come operatore gradiente, e con un piccolo abuso di linguaggio, si può scrivere, in forma compatta:

$$\text{div}(\underline{F}) = \bar{\nabla} \cdot \underline{F}$$

---

<sup>1</sup>Vedi Definizione n. 73

**Definizione 73 (Rotore)** Dato un campo vettoriale  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$  dove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è l'insieme di definizione di  $\underline{F}$ , si definisce **Rotore** di  $\underline{F}$  il seguente Vettore:

$$\text{rot}(\underline{F}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 & \cdots & \underline{e}_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_n \end{vmatrix}$$

Dove i vettori  $\underline{e}_i$  sono i versori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . In forma compatta, e con il solito abuso di linguaggio, si può scrivere:

$$\text{rot}(\underline{F}) = \bar{\nabla} \times \underline{F}$$

**Definizione 74 (Campo Conservativo)** Un campo vettoriale si dice *Conservativo* se, e solo se, l'integrale su qualsiasi curva  $\gamma$  chiusa sufficientemente regolare è nullo, o equivalentemente, se e solo se, l'integrale su una curva aperta, sufficientemente regolare, dipende soltanto dagli estremi e non dalla particolare curva  $\gamma$ .

**Teorema 92 (Condizione d'esistenza del potenziale Scalare)** *Condizione necessaria e sufficiente* per l'esistenza del potenziale scalare di un campo vettoriale  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto regolare, è che il campo stesso sia *Conservativo*.

**Definizione 75 (Dominio Semplicemente Connesso)** Un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice *semplicemente connesso*, se e solo se, **ogni curva chiusa**  $\{\gamma\} \subseteq \Omega$ , è il bordo di una superficie  $\Sigma$  interamente contenuta in  $\Omega$ .

**Corollario 5 (Campo in un dominio Semplicemente Connesso)** Sia  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$  con  $\Omega$  dominio aperto **semplicemente connesso**, allora condizione necessaria e sufficiente affinché il campo ammetta potenziale scalare è che sia:  $\text{rot}\underline{F} = 0$  in  $\Omega$ .

**Definizione 76 (Campo Radiale)** Un campo vettoriale  $\underline{F}$ , si dice **radiale**, se il suo modulo  $\|\underline{F}\|$  dipende soltanto dalla distanza dal polo, e la sua direzione è 'radiale', cioè coincide con quella della congiungente il polo, con il punto in cui è applicato il campo.

$$\underline{F}(\underline{x}) = \varphi(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \frac{\underline{x} - \underline{x}_0}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} = \psi(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

**Corollario 6 (Potenziale scalare di campi Radiali)** Ogni campo vettoriale Radiale, ammette potenziale scalare.

## 17.2 Forme e Relazioni in $\mathbb{R}^2$

**Definizione 77 (Flusso di un Campo attraverso una curva)** Sia dato un campo vettoriale  $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $\underline{F}(x, y) = (F_1(x, y); F_2(x, y))$ , definito in un aperto connesso  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , e sia dato un arco di curva semplice, regolare e rettificabile  $\gamma$ . Si definisce Flusso di  $\underline{F}$  attraverso  $\gamma$ , il seguente integrale curvilineo:

$$\Phi_\gamma(\underline{F}) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{n}_+ ds$$

Dove  $\underline{n}_+$  è il versore ortogonale a  $\gamma$  in  $\underline{x}$ , preso positivamente, cioè preso in maniera tale che, fissato il versore  $\underline{\tau}$  tangente a  $\gamma$ ,  $\underline{n}_+$  debba ruotare di  $\pi/2$  radianti in senso antiorario, per sovrapporsi a  $\underline{\tau}$ . Se si indica con  $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$  la rappresentazione parametrica di  $\gamma$ ; si ha che

$$\Phi_\gamma(\underline{F}) = \int_{t_1}^{t_2} (F_1(\underline{\varphi}(t)) \cdot \dot{y}(t) - F_2(\underline{\varphi}(t)) \cdot \dot{x}(t)) dt$$

Se si è posto

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n}_+ = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ -\tau_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{n}_- = \begin{pmatrix} -\tau_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix}$$

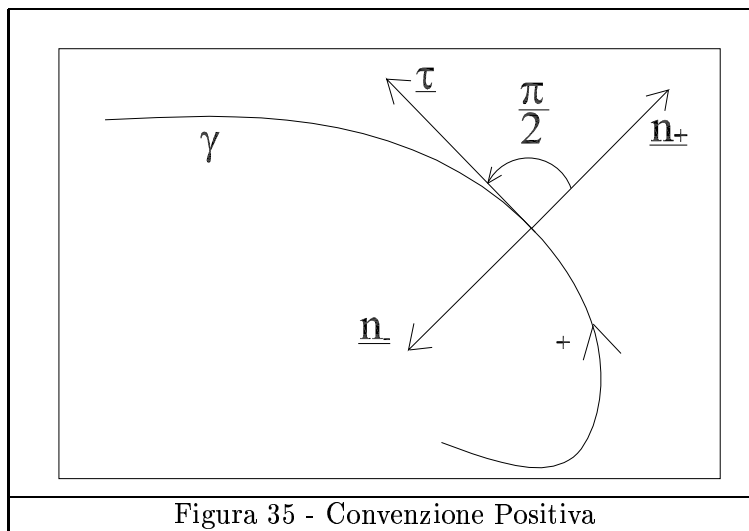


Figura 35 - Convenzione Positiva

**Definizione 78 (Orientamento Frontiera)** Dato un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , la cui frontiera sia un arco di curva regolare; si indicherà con  $+\partial\Omega$  la frontiera orientata positivamente. Il verso positivo è quello di percorrenza di un “omino” che vede la regione dell’insieme  $\Omega$ , alla sua sinistra.

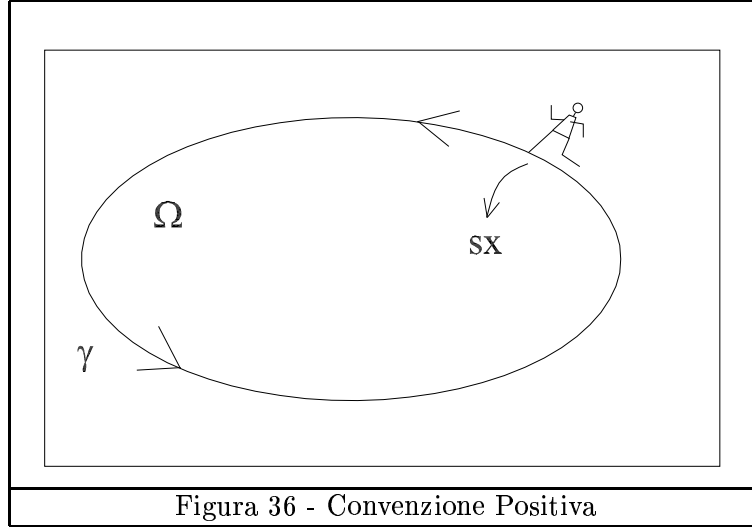


Figura 36 - Convenzione Positiva

### 17.2.1 Formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^2$

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni di classe  $C^1(D)$ , dove  $D$  è un dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$ ; allora si ha:

i)

$$\iint_D \partial_x f(x, y) dx dy = \int_{+\partial D} f dy$$

ii)

$$\iint_D \partial_y g(x, y) dx dy = - \int_{+\partial D} g dx$$

**Osservazione 32 (Area del Dominio)** Se si vuole calcolare l'area della superficie rappresentata da  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , basta calcolare uno dei seguenti integrali curvilinei:

$$m(D) = \int_{+\partial D} x dy = - \int_{+\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} x dy - y dx$$

**Definizione 79 (Divergenza in  $\mathbb{R}^2$ )** Dato un campo vettoriale  $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$ , la Divergenza di  $\underline{F}$ , è data da:

$$\text{div}(\underline{F}) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$$

Dove, con  $F_1 = F_1(x, y)$  ed  $F_2 = F_2(x, y)$  si sono indicate le due componenti di  $\underline{F}$ .

**Definizione 80 (Rotore in  $\mathbb{R}^2$ )** Dato un campo vettoriale  $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$ , il Rotore di  $\underline{F}$  è dato da:

$$\text{rot}(\underline{F}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}$$

Dove, con  $F_1 = F_1(x, y)$  ed  $F_2 = F_2(x, y)$  si sono indicate le due componenti di  $\underline{F}$ .

N.B.  $\underline{F}$  è definito in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , mentre il vettore Rotore di  $\underline{F}$  è un vettore di  $\mathbb{R}^3$  (infatti è ortogonale al piano  $xy$ ), con componenti  $x$  ed  $y$  identicamente nulle.

**Teorema 93 (della Divergenza)** Sia  $\underline{F}$  un campo vettoriale bidimensionale di classe  $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$ , con  $\Omega$  dominio regolare; allora si ha:

$$\iint_{\Omega} \text{div}(\underline{F}) dx dy = \int_{+\partial\Omega} F_1 dy - F_2 dx = \int_{+\partial\Omega} \underline{F} \cdot (+\underline{n}) ds$$

“L’integrale doppio della Divergenza di un campo piano, è uguale al flusso del campo uscente dalla frontiera di  $\Omega$ ”.

**Teorema 94 (di Stokes)** Sia  $\underline{F}$  un campo vettoriale bidimensionale di classe  $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$ , con  $\Omega$  dominio regolare; allora si ha:

$$\iint_{\Omega} \text{rot}(\underline{F}) dx dy = \int_{+\partial\Omega} \underline{F} \cdot \underline{\tau} ds = \int_{+\partial\Omega} \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

“Il flusso del Rotore di  $\underline{F}$ , attraverso la superficie piana  $\Omega$ , è uguale all’integrale di linea del campo, lungo la frontiera di  $\Omega$ , percorsa in senso positivo”.

**Osservazione 33 (Significato Fisico della Divergenza)** Se un qualsiasi campo  $\underline{F}$ , viene rappresentato mediante le proprie linee di forza (o linee di flusso), la Divergenza  $\text{div}(\underline{F})$ , può essere interpretata come una grandezza scalare, che tenga conto del fatto che, le stesse linee di forza possano intersecarsi in qualche punto, oppure no. Se in una regione, sufficientemente piccola del dominio di  $\underline{F}$ , le linee di forza non si intersecano, allora  $\text{div}(\underline{F}) = 0$  in tutti i punti di tale regione. Se, contrariamente, in un punto  $\underline{x}_0$ , le linee di forza convergono, allora  $\text{div}(\underline{F}(\underline{x}_0)) \neq 0$ .

(Vedi figure seguenti)

**Osservazione 34 (Significato Fisico del Rotore)** Se un qualsiasi campo  $\underline{F}$ , viene rappresentato mediante le proprie linee di forza (o linee di flusso), il Rotore  $\text{rot}(\underline{F})$ , può essere interpretato come una grandezza vettoriale, che tenga conto del fatto che, le stesse linee di forza possano o meno

assumere una conformazione spiraleggiante in una regione sufficientemente piccola del dominio del campo  $\underline{F}$ . Se in tale regione, le linee di forza assumono tale conformazione, allora  $\text{rot}(\underline{F}) \neq 0$ ; se, invece, non assumono una conformazione spiraleggiante, allora il campo si dirà **Irrotazionale**, e sarà  $\text{rot}(\underline{F}) = 0$ .

(Vedi figure seguenti)

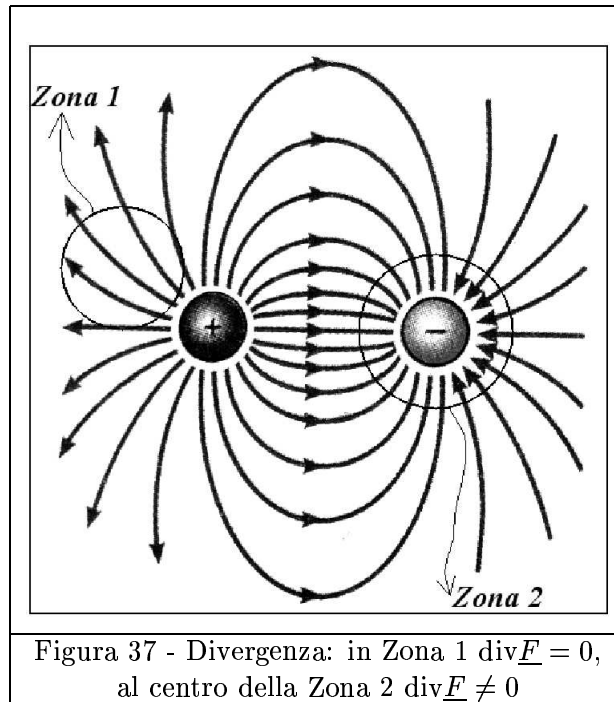


Figura 37 - Divergenza: in Zona 1  $\text{div}\underline{F} = 0$ ,  
al centro della Zona 2  $\text{div}\underline{F} \neq 0$

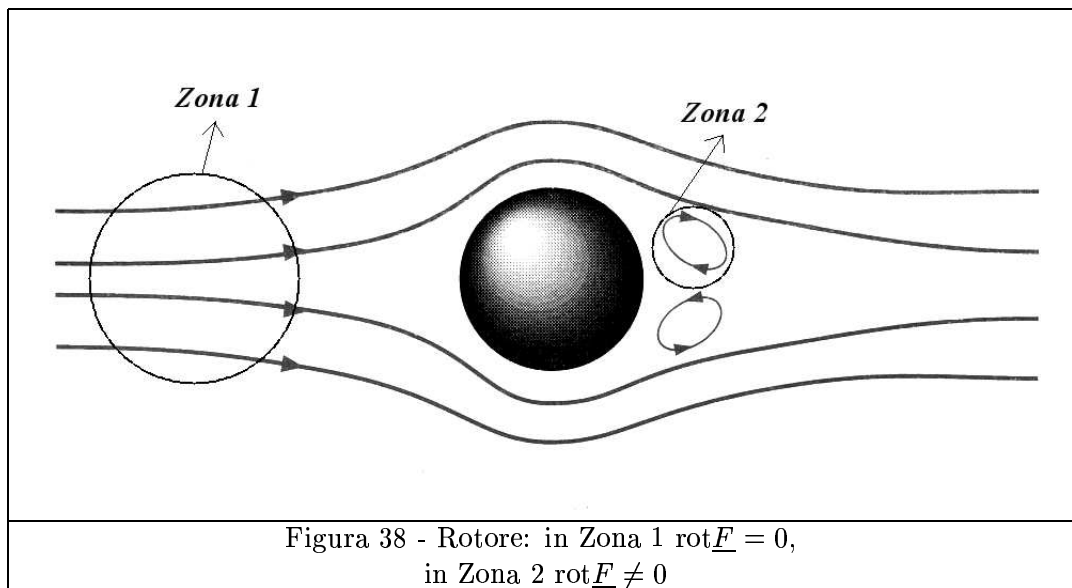


Figura 38 - Rotore: in Zona 1  $\text{rot}\underline{F} = 0$ ,  
in Zona 2  $\text{rot}\underline{F} \neq 0$



### 17.3 Forme e Relazioni in $\mathbb{R}^3$

**Definizione 81 (Divergenza in  $\mathbb{R}^3$ )** Dato un campo vettoriale  $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3)$ ; la Divergenza di  $\underline{F}$ , è data da:

$$\operatorname{div}(\underline{F}) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$$

Dove, con  $F_1 = F_1(x, y, z)$ ;  $F_2 = F_2(x, y, z)$ ;  $F_3 = F_3(x, y, z)$ , si sono indicate le tre componenti di  $\underline{F}(x, y, z)$

**Definizione 82 (Rotore in  $\mathbb{R}^3$ )** Dato un campo vettoriale  $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3)$ ; il rotore di  $\underline{F}$ , è dato da:

$$\operatorname{rot}(\underline{F}) = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2) \cdot \vec{i} + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3) \cdot \vec{j} + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) \cdot \vec{k}$$

Dove, con  $F_1 = F_1(x, y, z)$ ;  $F_2 = F_2(x, y, z)$ ;  $F_3 = F_3(x, y, z)$ , si sono indicate le tre componenti di  $\underline{F}(x, y, z)$

#### 17.3.1 Formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^3$

Sia  $\Omega$  un dominio aperto, connesso e regolare di  $\mathbb{R}^3$ ; siano  $f, g, h$  tre funzioni scalari ( $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ), di classe  $C^1(\Omega)$  definite e continue in  $\Omega$ , allora è:

i)

$$\iiint_{\Omega} \partial_x f dx dy dz = \iint_{+\partial\Omega} f dy dz$$

ii)

$$\iiint_{\Omega} \partial_y g dx dy dz = - \iint_{+\partial\Omega} g dx dz = \iint_{+\partial\Omega} g dz dx$$

iii)

$$\iiint_{\Omega} \partial_z h dx dy dz = \iint_{+\partial\Omega} h dx dy$$

**Teorema 95 (della Divergenza)** Sia  $\Omega$  un dominio aperto, connesso e regolare di  $\mathbb{R}^3$ ; sia  $\underline{F}$  un campo vettoriale di classe  $C^1(\Omega)$ ; allora:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) dx dy dz = \iint_{+\partial\Omega} F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy = \iint_{\Sigma} \underline{F}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_+ d\sigma$$

**Definizione 83 (2-forma)** L'espressione  $\omega = F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy$  prende il nome di **2-forma**.

**Corollario 7** Sia dato un campo vettoriale di classe  $C^1$  in un aperto regolare  $\Omega$ , e sia  $x_0 \in \Omega$ ; allora si ha:

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Phi_{+\partial S(\underline{x}_0, r)}}{m(S(\underline{x}_0, r))}$$

Dove  $m(S(\underline{x}_0, r))$  è la misura della Sfera di centro  $x_0$  e raggio  $r$ , e

$$\Phi_{+\partial S(\underline{x}_0, r)} = \int_{\partial S(\underline{x}_0, r)} \underline{F} \cdot \underline{n}_+ ds$$

**Osservazione 35** Si può dire che:  $\operatorname{div} \underline{F} = 0$  se, e solo se, è nullo il flusso uscente dalla frontiera di qualsiasi **Dominio** di  $\underline{F}$ .

*N.B. Non tutte le superfici chiuse contenute nel campo di esistenza  $\Omega$  del campo vettoriale, sono la frontiera di un **Dominio** di  $\underline{F}$  contenuto in  $\Omega$ .*

**Teorema 96 (di Stokes)** Sia dato un campo vettoriale  $\underline{F}$  di classe  $C^1$  in un dominio aperto  $\Omega$ , e sia  $\Sigma$  una porzione di superficie semplice, regolare e a due facce, immagine di un dominio regolare, connesso  $D$  di  $\mathbb{R}^2$ . Allora è:

$$\Phi_{+\Sigma}(\operatorname{rot}(\underline{F})) = \iint_{+\Sigma} \operatorname{rot} \underline{F} \cdot \underline{n}_+ d\sigma = \int_{+B\Sigma} \underline{F} \cdot d\sigma = \int_{+B\Sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

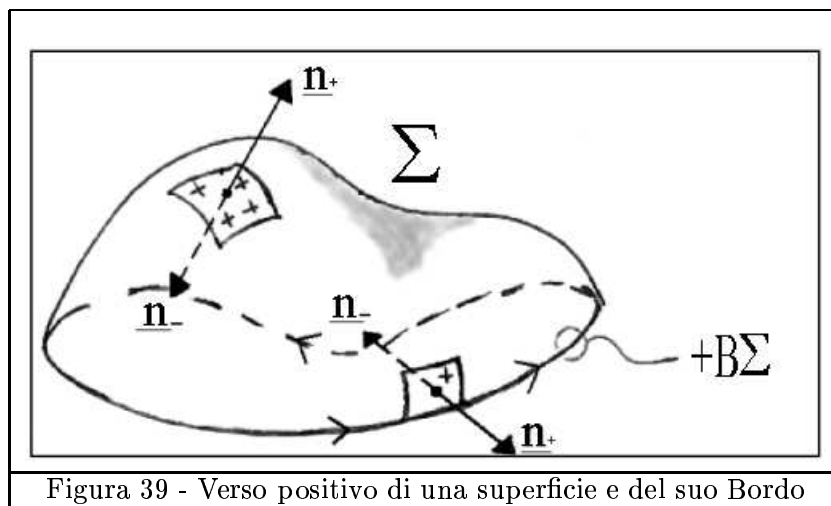


Figura 39 - Verso positivo di una superficie e del suo Bordo

Per fissare l'orientamento della superficie  $\Sigma$ , si indica con  $\underline{n}_+$  il versore normale a  $\Sigma$  che punta dalla parte della faccia, convenzionalmente, positiva. Per l'orientamento del Bordo, si consideri il versore  $\underline{n}_+$  preso in prossimità del bordo di  $\Sigma$ ; il verso positivo di  $B\Sigma$  (indicato con  $+B\Sigma$ ) è quello che, visto da  $\underline{n}_+$ , punta in senso antiorario.

**Definizione 84 (Campo Solenoidale)** *Un campo vettoriale che goda della proprietà per la quale il flusso attraverso una superficie aperta dipende soltanto dal suo bordo, e non dalla particolare superficie, prende il nome di **Campo Solenoidale**.*

*Ciò equivale a dire che: “il flusso di un campo solenoidale, attraverso una superficie chiusa, contenuta nel suo dominio di definizione, è nullo”.*

**Definizione 85 (Potenziale Vettoriale)** *Dato un campo vettoriale  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$  con  $\Omega$  dominio aperto regolare, si definisce **Potenziale Vettoriale** un vettore  $\underline{G}$  tale che sia:*

$$\text{rot} \underline{G} = \underline{F}$$

**Osservazione 36** *Il potenziale vettoriale, se esiste, è definito a meno di un campo conservativo, cioè:*

$$\underline{F} = \text{rot} \underline{G} \Rightarrow \underline{F} = \text{rot}(\underline{G} + \nabla f) = \text{rot} \underline{G} + \text{rot}(\nabla f) = \text{rot} \underline{G} + 0 = \text{rot} \underline{G}$$

**Teorema 97 (Condizioni di esistenza del campo Solenoidale)** *Sia dato un campo vettoriale  $\underline{F}$  di classe  $C^1$  in un aperto regolare  $\Omega$ , allora:*

- **Condizione Sufficiente** affinché  $\underline{F}$  sia solenoidale, è che esso ammetta potenziale vettoriale; cioè esista un campo vettoriale  $\underline{G}$  tale che

$$\underline{F} = \text{rot} \underline{G}$$

- **Condizione Necessaria** affinché  $\underline{F}$  sia solenoidale, è che sia, in  $\Omega$ :

$$\text{div}(\underline{F}) = 0$$

**Osservazione 37 (Utilità del Potenziale Vettoriale)** *Se  $\underline{F}$  ammette potenziale vettoriale, dal teorema di Stokes, segue che, per calcolare il flusso di  $\underline{F}$  attraverso una superficie **aperta**  $\Sigma$ , è sufficiente calcolare la circuitazione del Potenziale Vettoriale, lungo il Bordo di  $\Sigma$ ; ovvero:*

$$\iint_{+\Sigma} \underline{F} \cdot d\sigma = \iint_{+\Sigma} \text{rot}(\underline{G}) \cdot d\sigma = \int_{+B\Sigma} \underline{G} \cdot d\sigma$$

*Quindi si calcola un integrale di linea, invece di un integrale di superficie!*

**Teorema 98 (Condizione d'esistenza del Potenziale Vettoriale)** *Condizione **necessaria e sufficiente** affinché un campo vettoriale  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$  dove  $\Omega$  è un dominio aperto e regolare, ammetta potenziale vettoriale, è che sia nullo il flusso del campo uscente da qualsiasi superficie regolare chiusa, contenuta in  $\Omega$ .*

**Definizione 86 (Dominio Stellato)** *Un dominio  $\Omega$  si dice **stellato** rispetto ad un punto  $\underline{x}_0 \in \Omega$ , se il segmento che congiunge  $\underline{x}_0$  con qualsiasi altro punto  $\underline{x}$  del dominio, è interamente contenuto in  $\Omega$ .*

**Teorema 99 (Insiemi Stellati e Semplicemente Connessi)** *Ogni insieme stellato, è semplicemente connesso. Non è vero il viceversa.*

**Teorema 100 (Potenziale vettoriale e domini stellati)** *Sia dato un campo vettoriale  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$  dove  $\Omega$  è un dominio aperto regolare e **stellato** rispetto al punto  $\underline{x}_0$ , allora se  $\operatorname{div} \underline{F} = 0$ , il campo ammette potenziale vettoriale in  $\Omega$ .*

## Capitolo 18

# Studio dei campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$

Lo studio di un campo vettoriale  $\underline{F}$  bidimensionale, consiste nel verificare che esso ammetta potenziale scalare e vettoriale, ed in caso affermativo, calcolarne l'espressione matematica.

Per fare ciò, è necessario seguire i seguenti punti:

### 18.1 Verifica dell'esistenza, e calcolo dei Potenziali

#### Potenziale Scalare

1. Si osservi se  $\underline{F}$  è un campo Radiale; in caso affermativo esso ammetterà sicuramente potenziale scalare. In caso contrario proseguire al punto successivo.
2. si determini l'insieme di definizione di  $\underline{F}$ ; sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  tale insieme. Se  $\Omega$  è **Connesso**, si prosegue al punto successivo, altrimenti, prima di proseguire, osservare il paragrafo 18.1.1.
3. Si verifichi che  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ .
4. Si calcoli  $\text{rot}\underline{F}$ .
5. Se  $\text{rot}\underline{F} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega$ , si osservi la natura di  $\Omega$ , cioè:
  - Se  $\Omega$  è semplicemente connesso, allora il campo vettoriale  $\underline{F}$  ammette sicuramente potenziale scalare.
  - Se  $\Omega$  non è semplicemente connesso, si deve operare in maniera descritta in 18.1.2.
6. Se  $\text{rot}\underline{F} \neq 0$ , allora il campo vettoriale non ammette potenziale scalare, e la ricerca è conclusa.

### 18.1.1 Quando $\Omega$ NON è CONNESSO

Se  $\underline{F}$  ha come curve singolari, rette o curve illimitate (che si estendono all'infinito), allora  $\Omega$  non è Connesso (N.B. **Insieme Connesso** ed **Insieme Semplicemente Connesso**, sono due concetti distinti); allora non ha senso ricercare il potenziale scalare in  $\Omega$ , globalmente, ma spesso, si può suddividere  $\Omega$  in tanti insiemi  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  connessi, tali che  $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ ; e ricercare il potenziale scalare di  $\underline{F}$  in ciascun insieme  $\Omega_i$ .

### 18.1.2 Quando $\Omega$ non è Semplicemente Connesso

Si possono adottare i due seguenti metodi:

1. Il seguente metodo è alquanto rischioso, poiché può costituire fonte di errori anche molto gravi; tuttavia esso costituisce una via molto rapida per assicurare l'esistenza del potenziale scalare e contemporaneamente, calcolarne l'espressione matematica.

Anche se non si ha la garanzia che il potenziale scalare,  $f(x, y)$ , esista, si calcoli comunque (vedi 18.1.3). Se  $f(x, y)$  è definita in  $\Omega$ , oppure in un insieme  $\Omega_* \supset \Omega$  (cioè  $\Omega_*$  è più grande di  $\Omega$ ); allora  $\underline{F}$  ammette potenziale scalare, ed è proprio uguale all' $f(x, y)$  calcolato.

N.B. Se l'insieme di definizione  $\Omega_*$  di  $f(x, y)$  è tale che  $\Omega \supset \Omega_*$  (cioè  $\Omega_*$  è più piccolo di  $\Omega$ ); allora l' $f(x, y)$  calcolato, non è il potenziale scalare di  $\underline{F}$ , che potrebbe anche non ammettere tale potenziale! In questo caso è necessario seguire quanto riportato nel seguente punto 2

2. Nella grande maggioranza dei casi, si verifica che  $\Omega$  non corrisponda ad  $\mathbb{R}^2$  (che è un dominio semplicemente connesso), ma vi siano dei "buchi", cioè degli elementi di piano in cui il campo vettoriale è singolare. I 'buchi' possono avere la seguente natura:

- **Punti Singolari**, cioè tutti quei punti di  $\mathbb{R}^2$  in cui  $\underline{F}$  non è definito (di solito quei punti che annullano il denominatore delle componenti di  $\underline{F}$ )
- **Superfici o Curve Chiuse** in  $\mathbb{R}^2$
- **Segmenti o Curve aperte limitate**

In questi casi si rende necessario il calcolo della circuitazione del campo vettoriale  $\underline{F}$ , lungo una qualsiasi curva chiusa  $\gamma$  interamente contenuta in  $\Omega$ , che circonda il 'buco'. Se l'espressione matematica del campo vettoriale è piuttosto complessa, si può considerare come curva  $\gamma$  il quadrato che circonda il 'buco'.

Bisogna, quindi, calcolare

$$I = \oint_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

si hanno i seguenti casi:

- i)  $I = 0$ ; allora  $\underline{F}$  ammette potenziale scalare in  $\Omega$
- ii)  $I \neq 0$ ; allora  $\underline{F}$  non ammette potenziale scalare in  $\Omega$ , e la ricerca è conclusa.

### 18.1.3 Calcolo del Potenziale Scalare

Dopo aver verificato che  $\underline{F}$  ammette potenziale scalare in  $\Omega$  (a meno che non si sia scelto di adottare il metodo esposto al punto 1, precedente), si proceda al calcolo vero e proprio.

Sia  $f(x, y)$  la funzione potenziale scalare ( $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ). Tale funzione può essere calcolata nei due seguenti modi, ricordando che  $\nabla f = \underline{F} = (F_1(x, y); F_2(x, y))$ :

i)

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int F_1 dx + \varphi(y)$$

Dove  $\varphi(y)$ , è una funzione della sola variabile  $y$ . Quindi

$$\partial_y f(x, y) = \frac{\partial (\int F_1 dx)}{\partial y} + \varphi'(y) = F_2$$

Da quest'ultima si ricava  $\varphi'(y)$  e quindi  $\varphi(y)$ , e si sostituisce alla prima relazione.

ii)

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy + \psi(x) = \int F_2 dy + \psi(x)$$

Dove  $\psi(x)$ , è una funzione della sola variabile  $x$ . Quindi

$$\partial_x f(x, y) = \frac{\partial (\int F_2 dy)}{\partial x} + \psi'(x) = F_1$$

Da quest'ultima si ricava  $\psi'(x)$  e quindi  $\psi(x)$ , e si sostituisce alla prima relazione.

## Potenziale Vettoriale

In  $\mathbb{R}^2$  il potenziale vettoriale di un campo  $\underline{F}$ , è un vettore ortogonale al piano a cui appartiene  $\underline{F}$ ; quindi, contrariamente a quanto ci si possa aspettare, dato un campo vettoriale  $\underline{F}$  definito in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , il potenziale vettoriale (se esiste) di  $\underline{F}$ , è un vettore di  $\mathbb{R}^3$ , dato da:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_z \end{pmatrix}$$

Il calcolo di  $\underline{G}$  consiste quindi, nel solo calcolo della componente  $G_z$ . Per vedere se  $\underline{F}$  ammette potenziale vettoriale, osservare i seguenti punti:

1. Si determini l'insieme di definizione di  $\underline{F}$ ; sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  tale insieme.
2. Si verifichi che  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ .
3. Si calcoli  $\text{div}\underline{F}$ .
4. Se  $\text{div}\underline{F} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega$ , si osservi la natura di  $\Omega$ , cioè:
  - Se  $\Omega$  è Stellato, allora il campo vettoriale  $\underline{F}$  ammette, sicuramente, potenziale vettoriale.
  - Se  $\Omega$  non è Stellato, si deve operare in maniera descritta in 18.1.4
5. Se  $\text{div}\underline{F} \neq 0$ , allora  $\underline{F}$  non ammette potenziale vettoriale, e la ricerca è conclusa.

### 18.1.4 Quando $\Omega$ non è Stellato

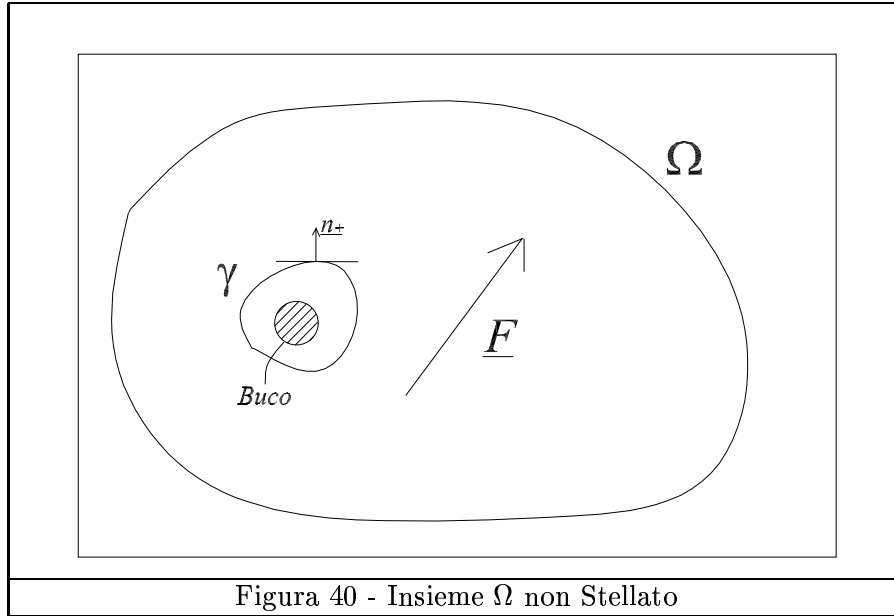
Quando  $\Omega$  non è Stellato, si consideri una qualsiasi curva chiusa  $\gamma$ , che circondi un solo 'buco' (se vi sono 'n' buchi, il calcolo deve essere effettuato 'n' volte), e si calcoli il FLUSSO  $\Phi_\gamma(\underline{F})$  di  $\underline{F}$  attraverso la curva<sup>1</sup> stessa  $\gamma$  (vedi figura sottostante); si hanno i due seguenti casi:

- i)  $\Phi_\gamma(\underline{F}) = 0$ , allora  $\underline{F}$  ammette potenziale vettoriale.
- ii)  $\Phi_\gamma(\underline{F}) \neq 0$ , allora  $\underline{F}$ , non ammette potenziale vettoriale, e la ricerca è conclusa.

---

<sup>1</sup>Vedi la definizione n. 77, a pag. 124



Figura 40 - Insieme  $\Omega$  non Stellato

### 18.1.5 Calcolo del Potenziale Vettoriale

Si procede nel seguente modo:

1. Si considera il campo vettoriale  $\underline{F}$  come vettore di  $\mathbb{R}^3$  con terza componente identicamente nulla:  $\underline{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dovendo essere  $\underline{F} = \text{rot} \underline{G}$ , e considerando che  $\underline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_z \end{pmatrix}$ , si ha che:

$$\begin{pmatrix} \partial_y G_z \\ -\partial_x G_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare  $G_z$  si può operare in uno dei seguenti modi<sup>2</sup>:

i)

$$G_z = \int \partial_y G_z dy + \varphi(x) \Rightarrow G_z = \int F_1 dy + \varphi(x)$$

Dove  $\varphi(x)$  è una funzione nella sola variabile  $x$ . Quindi

$$\partial_x G_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int F_1 dy \right) + \varphi'(x) = -F_2$$

<sup>2</sup>Da notare che  $G_z$  indica la componente di  $\underline{G}$  rispetto all'asse  $z$ , e non la derivata rispetto a  $z$

dalla quale si ricava  $\varphi'(x)$  e quindi  $\varphi(x)$ , che, sostituita nella prima equazione, dà il potenziale vettoriale cercato.

ii)

$$G_z = \int \partial_x G_z dx + \psi(y) \Rightarrow G_z = \int -F_2 dx + \psi(y)$$

Dove  $\psi(y)$  è una funzione nella sola variabile  $y$ . Quindi

$$\partial_y G_z = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int -F_2 dx \right) + \psi'(y) = F_1$$

dalla quale si ricava  $\psi'(y)$  e quindi  $\psi(y)$ , che, sostituita nella prima equazione, dà il potenziale vettoriale cercato.

## Capitolo 19

# Studio dei campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$

Anche in questo caso si verificherà l'esistenza dei potenziali scalari e vettoriali, e se ne calcolerà l'espressione matematica.

### 19.1 Verifica dell'esistenza, e calcolo dei Potenziali

#### Potenziale Scalare

1. Si osservi se  $\underline{F}$  è un campo Radiale; in caso affermativo esso ammetterà sicuramente potenziale scalare. In caso contrario proseguire al punto successivo.
2. Si determini l'insieme di definizione di  $\underline{F}$ ; sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  tale insieme. Se  $\Omega$  è **Connesso**, si prosegua al punto successivo, altrimenti, prima di proseguire, osservare il paragrafo 19.1.1.
3. Si verifichi che  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ .
4. Si calcoli  $\text{rot}\underline{F}$ <sup>1</sup>.
5. Se  $\text{rot}\underline{F} = (0, 0, 0) \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Omega$ , si osservi la natura di  $\Omega$ , cioè:
  - Se  $\Omega$  è semplicemente connesso <sup>2</sup>, allora il campo vettoriale  $\underline{F}$  ammette sicuramente potenziale scalare.
  - Se  $\Omega$  non è semplicemente connesso, si deve operare in maniera descritta in 19.1.2.

---

<sup>1</sup>Si osservi che  $\text{rot}\underline{F}$  è un vettore tridimensionale

<sup>2</sup>In  $\mathbb{R}^3$ , l'intuizione geometrica di insieme semplicemente connesso, è lievemente diversa da quella in  $\mathbb{R}^2$ ; vedi paragrafo 19.1.2

6. Se  $\text{rot}\underline{F} \neq (0, 0, 0)$ , allora il campo vettoriale non ammette potenziale scalare, e la ricerca è conclusa.

### 19.1.1 Insieme Sconnesso in $\mathbb{R}^3$

Se  $\underline{F}$  ha come superfici singolari uno o più Piani, allora  $\Omega$  non è **Connesso**; in questo caso, valgono le solite considerazioni viste, a suo tempo, per i campi in  $\mathbb{R}^2$  (Vedi paragrafo 18.1.1).

### 19.1.2 Insieme non Semplicemente Connesso in $\mathbb{R}^3$

Anche in  $\mathbb{R}^3$  si possono utilizzare le osservazioni fatte al paragrafo 18.1.2, con le dovute modifiche, poiché si sta trattando lo spazio, e non il piano. Si seguano i seguenti punti

1. Vedi Punto 1 paragrafo 18.1.2
2. In  $\mathbb{R}^3$  non si parla di “Buchi”, ma di “Tagli”; infatti un punto singolare del campo, non rompe la connessione semplice di  $\mathbb{R}^3$ . I “Tagli” possono avere la seguente natura:
  - Rette o Curve illimitate da entrambi i lati
  - Curve Chiuse

In questi casi si rende necessario il calcolo della circuitazione del campo vettoriale  $\underline{F}$ , lungo una qualsiasi curva chiusa  $\gamma$  interamente contenuta in  $\Omega$ , che circonda il “Taglio” (cioè la retta, la curva chiusa o la curva illimitata), e trarre le stesse conclusioni viste al punto 2 del paragrafo 18.1.2.

**N.B. se gli “Elementi Singolari” , sono punti, semirette, curve Aperte o superfici limitate, questi non rompono la connessione semplice di  $\mathbb{R}^3$ ; cioè, se, per esempio,  $\underline{F}$  è definito in tutto  $\mathbb{R}^3$  tranne che in un punto (oppure una semiretta o una curva Aperta ecc.),  $\Omega$  è Semplicemente Connesso<sup>3</sup>.**

---

<sup>3</sup>Vedi Definizione n. 75 a pag.123

### 19.1.3 Calcolo del Potenziale scalare

Sia  $f(x, y, z)$  la funzione potenziale scalare ( $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ). Tale funzione può essere calcolata nei tre seguenti modi, ricordando che  $\nabla f = \underline{F} = (F_1(x, y, z); F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ :

i)

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx + \varphi(y, z) = \int F_1 dx + \varphi(y, z)$$

Dove  $\varphi(y, z)$ , è una funzione che dipende dalle sole variabili  $y, z$ . Quindi

$$\partial_y f(x, y, z) = \frac{\partial (\int F_1 dx)}{\partial y} + \partial_y \varphi(y, z) = F_2$$

$$\partial_z f(x, y, z) = \frac{\partial (\int F_1 dx)}{\partial z} + \partial_z \varphi(y, z) = F_3$$

Da queste ultime, si confrontino  $\partial_y \varphi(y, z)$  e  $\partial_z \varphi(y, z)$ , per ricavare  $\varphi(y, z)$ ; sostituendo tale  $\varphi(y, z)$  nella prima relazione, si ottiene il potenziale  $f(x, y, z)$  cercato.

ii)

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy + \psi(x, z) = \int F_2 dy + \psi(x, z)$$

Dove  $\psi(x, z)$ , è una funzione che dipende dalle sole variabili  $x, z$ . Quindi

$$\partial_x f(x, y, z) = \frac{\partial (\int F_2 dy)}{\partial x} + \partial_x \psi(x, z) = F_1$$

$$\partial_z f(x, y, z) = \frac{\partial (\int F_2 dy)}{\partial z} + \partial_z \psi(x, z) = F_3$$

Da queste ultime, si confrontino  $\partial_x \psi(x, z)$  e  $\partial_z \psi(x, z)$ , per ricavare  $\psi(x, z)$ ; sostituendo tale  $\psi(x, z)$  nella prima relazione, si ottiene il potenziale  $f(x, y, z)$  cercato.

iii)

$$f(x, y, z) = \int \frac{\partial f}{\partial z} dz + \chi(x, y) = \int F_3 dz + \chi(x, y)$$

Dove  $\chi(x, y)$ , è una funzione che dipende dalle sole variabili  $x, y$ . Quindi

$$\partial_x f(x, y, z) = \frac{\partial (\int F_3 dz)}{\partial x} + \partial_x \chi(x, y) = F_1$$

$$\partial_y f(x, y, z) = \frac{\partial (\int F_3 dz)}{\partial y} + \partial_y \chi(x, y) = F_2$$

Da queste ultime, si confrontino  $\partial_x \chi(x, y)$  e  $\partial_y \chi(x, y)$ , per ricavare  $\chi(x, y)$ ; sostituendo tale  $\chi(x, y)$  nella prima relazione, si ottiene il potenziale  $f(x, y, z)$  cercato.

## Potenziale Vettoriale

Per verificare l'esistenza del potenziale vettoriale, si seguano i seguenti punti:

1. Si determini l'insieme di definizione di  $\underline{F}$ ; sia  $\Omega$  tale insieme.
2. Si verifichi che  $\underline{F} \in C^1(\Omega)$ .
3. Si calcoli  $\text{div}\underline{F}$ .
4. Se  $\text{div}\underline{F} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Omega$ , si osservi la natura di  $\Omega$ , cioè:
  - Se  $\Omega$  è Stellato, allora il campo vettoriale  $\underline{F}$  ammette, sicuramente, potenziale vettoriale.
  - Se  $\Omega$  non è Stellato, si deve operare in maniera descritta in 19.1.4
5. Se  $\text{div}\underline{F} \neq 0$ , allora  $\underline{F}$  non ammette potenziale vettoriale, e la ricerca è conclusa.

### 19.1.4 Se $\Omega$ non è stellato

Quando  $\Omega$  non è stellato, la condizione  $\text{div}\underline{F} = 0$ , non è sufficiente a garantire l'esistenza del potenziale vettoriale; in questi casi bisogna agire nel seguente modo:

- i) Bisogna osservare, che tutte le superfici Chiuse contenute in  $\Omega$ , siano la frontiera di un Dominio Interamente Contenuto in  $\Omega$ . Se ciò avviene, il campo vettoriale  $\underline{F}$ , ammette sicuramente potenziale vettoriale in  $\Omega$  (sempre a patto che  $\text{div}\underline{F} = 0$ ).
- ii) Se, quanto detto al punto i, non è verificato, bisogna costruire la superficie chiusa, che circonda la singolarità, e calcolare il Flusso del Campo vettoriale, attraverso tale superficie; cioè bisogna calcolare:

$$I = \iint_{+\Sigma} \underline{F}(\underline{x}) \cdot \underline{n}_+ d\sigma$$

che è, ovviamente, un integrale superficiale<sup>4</sup>; si hanno i seguenti casi:

- a)  $I = 0$ . Allora  $\underline{F}$  ammette potenziale vettoriale in  $\Omega$
- b)  $I \neq 0$ . Allora  $\underline{F}$  NON ammette potenziale vettoriale in  $\Omega$ , e la ricerca è conclusa.

N.B. La condizione “i resta verificata, se le singolarità sono del tipo: **rette, semirette, curve illimitate**; mentre non è verificata, se le singolarità sono del tipo: **punti, curve, superfici limitate, volumi**.

<sup>4</sup>Osservare che, per calcolare questo integrale, non è possibile applicare il teorema della Divergenza (Vedi Teorema n.95 a pag.128), infatti il volume racchiuso da  $\Sigma$ , comprendendo la singolarità, non appartiene ad  $\Omega$

### 19.1.5 Calcolo del Potenziale Vettoriale

Il calcolo del potenziale vettoriale di un campo definito in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , presenta delle forti analogie con il calcolo visto in  $\mathbb{R}^2$ . Si cercherà il potenziale vettoriale della forma:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se  $\underline{G}$  è il potenziale vettoriale di  $\underline{F}$ , deve essere:

$$\text{rot} \underline{G} = \underline{F} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_y G_z - \partial_z G_y \\ \partial_z G_x - \partial_x G_z \\ \partial_x G_y - \partial_y G_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

Avendo posto,  $G_z = 0$ , si ha:

$$\begin{cases} -\partial_z G_y = F_1 \\ \partial_z G_x = F_2 \\ \partial_x G_y - \partial_y G_x = F_3 \end{cases}$$

Da cui segue:

$$G_y = \int -\partial_z G_y dz + \varphi(x, y) = \int -F_1 dz + \varphi(x, y)$$

Dove  $\varphi(x, y)$  è una funzione delle sole variabili  $x, y$ ; analogamente:

$$G_x = \int \partial_z G_x dz + \psi(x, y) = \int F_2 dz + \psi(x, y)$$

Ancora una volta  $\psi(x, y)$  è una funzione delle sole variabili  $x, y$ . Sfruttando la terza relazione, si ha:

$$\partial_x G_y - \partial_y G_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int -F_1 dz \right) + \partial_x \varphi(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int F_2 dz \right) - \partial_y \psi(x, y) = F_3$$

Da quest'ultima, si ricava la relazione che esiste fra  $\partial_x \varphi(x, y)$  e  $\partial_y \psi(x, y)$ , e quindi le espressioni di  $\varphi(x, y)$  e  $\psi(x, y)$ , che sostituite nelle precedenti espressioni di  $G_x$  e  $G_y$ , danno le componenti del vettore  $\underline{G}$  cercato.

**Osservazione 38** *Se si fosse annullata un'altra componente del vettore  $\underline{G}$ , sarebbero cambiati i riferimenti alle variabili di integrazione e di derivazione, ma il procedimento sarebbe stato identico.*

*L'annullamento di una componente del vettore  $\underline{G}$  è sempre attuabile, in quanto i potenziali vettoriali di un campo, differiscono di un campo conservativo<sup>5</sup>, per cui si può sempre prendere un campo conservativo che annulli, punto per punto, una componente di  $\underline{G}$ .*

<sup>5</sup>Vedi osservazione n.36 a pag.130

## Capitolo 20

# Equazioni Differenziali

Questo capitolo sarà interamente dedicato allo studio delle Equazioni e dei sistemi di equazioni Differenziali, Lineari e non lineari.

Nei casi in cui non è esplicitamente possibile ricavare la soluzione di un'equazione differenziale; ci occuperemo di ricavarne una sua approssimazione, oppure ci accontenteremo di informazioni parziali sull'andamento della medesima.

### 20.1 Integrazione per Serie

Quello che segue, è uno dei metodi di approssimazione delle soluzioni di un'equazione differenziale qualsiasi (anche non lineare), che soddisfi alcune condizioni, di seguito riportate.

Si riporta, la definizione di funzione Analitica, data a suo tempo, a pag 92:

**Definizione 87 (Funzione Analitica)** *Una funzione  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , si dice analitica in un intervallo  $(a, b)$ , e si scrive  $f \in \mathcal{A}(a, b)$ ; se per ogni  $x_0 \in (a, b)$ , esiste un  $\delta > 0$ , tale che:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (a, b)$$

Data un'equazione differenziale di ordine  $(n)$ :

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \dots + P_n(x)y + P_{n+1}(x) = f(x)$$

Si ha il seguente:



**Teorema 101 (Sulla analiticità delle Soluzioni)** *Se*

$P_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ), ed  $f(x)$  sono funzioni analitiche in un intorno del punto  $x = x_0$ , e se  $P_0(x_0) \neq 0$ ; allora le soluzioni dell'equazione data, sono anch'esse analitiche in un certo intorno del punto  $x_0$ . Ed in particolare saranno del tipo

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

**Osservazione 39** *Si ricordi che, se una funzione  $f(x)$  ammette lo sviluppo in serie di Taylor (quindi è analitica), tale serie converge uniformemente ad  $f(x)$ , in un intorno del punto  $x_0$ ; quindi, per la serie indicata sopra, si ha che sono validi i teoremi sulle serie uniformemente convergenti; in particolare i teoremi sull'integrazione e derivazione per serie. Allora si ha:*

$$\begin{cases} y &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \\ y' &= \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \\ y'' &= \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) k a_k (x - x_0)^{k-2} \\ y''' &= \sum_{k=3}^{+\infty} (k-2)(k-1) k a_k (x - x_0)^{k-3} \\ \dots & \end{cases}$$

Quindi, se viene assegnato un problema di Cauchy (cioè sono assegnati i valori della funzione  $y(x_0)$  e delle sue derivate fino all'ordine  $(n-1)$  in  $x_0$ ); per ricavarne la soluzione approssimata (che, ricordiamo essere unica in quanto  $f \in C^\infty$ ); è sufficiente sostituire, nell'equazione, i corrispondenti sviluppi in serie delle funzioni, ed eguagliare i relativi coefficienti.

Se in luogo della serie infinita, si considera la serie dei primi  $m$  termini; si avrà la soluzione approssimata dell'equazione. La precisione di tale soluzione, dipenderà dal valore  $m$ ; in particolare, maggiore sarà  $m$ , e maggiore sarà la precisione della soluzione!

**Esempio importante - Equazione di Bessel**

L'equazione differenziale:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

appare spesso nei problemi legati alla conduzione del calore, e in quelli di elettrostatica, nel caso di simmetria radiale. Col metodo esposto sopra, si ha che, la sua soluzione è data da:

$$y(x) = J_n(x) \triangleq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p! \Gamma(n+p+1)}$$

La funzione

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

è denominata: **Gamma di Eulero**, ed è tale che  $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ . Mentre la funzione  $J_n(x)$  è chiamata **Funzione di Bessel di prima specie di ordine n**. Da notare che, l'equazione di Bessel, è tale che  $P_0(x_0) = P_0(0) = 0$ ; quindi, non essendo verificata un'ipotesi del teorema 101, non si può considerare la soluzione, del tipo:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

ma bisogna considerare la soluzione del tipo:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^{k+2}$$

E, più in generale: se  $P_0(x_0) = 0$  di grado  $n$ ; la soluzione, sarà del tipo:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^{k+n}$$

## 20.2 Soluzioni Periodiche

E' molto importante, nelle applicazioni ingegneristiche, saper ricavare le soluzioni periodiche di un'equazione differenziale, nel caso che, data equazione le ammetta. In questo paragrafo, ci occuperemo delle condizioni necessarie, e sufficienti per poter valutare le soluzioni periodiche di un'equazione differenziale.

Ricordiamo che una funzione  $f(t)$ , è periodica di periodo  $T$ , se e solo se:

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in D \text{ Dominio}$$

Data un'equazione differenziale:

$$y^{(n)}(t) = F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

si ha il seguente:

**Teorema 102 (Condizione Necessaria)** *Condizione necessaria, affinché l'equazione differenziale  $y^{(n)}(t) = F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)$ , ammetta soluzioni periodiche; è che  $F\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)$  sia periodica rispetto alla variabile  $t$ .*

**Osservazione 40** *Se la funzione  $F$  non dipende esplicitamente da  $t$ , cioè si ha:  $F\left(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)$ ; essa può essere considerata periodica, di periodo qualsiasi.*

### 20.3 Esistenza ed Unicità delle Soluzioni

Riportiamo qui di seguito, il teorema, già indicato a pag. 78, che garantisce l'esistenza ed unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy:

**Teorema 103 (Esistenza ed unicità locale)** *Dato il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

*Consideriamo  $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$  ed  $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ; e sia  $(t_0, \underline{y}_0) \in \Omega$ ; allora: Se  $\underline{f}$  è continua in entrambe le variabili, e se*

$$\exists M > 0 : \|\underline{f}(t, \underline{y}_1) - \underline{f}(t, \underline{y}_2)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M \|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\|_{\mathbb{R}^n}$$

*Allora  $\exists \delta > 0$ , ed esiste, ed è unica, una funzione di classe  $C^1$ , tale che:*

$$\underline{y} : [t_0 - \delta; t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Osservazione 41** *Dal teorema precedente, deriva che, se  $\underline{f}$ , è Lipschitziana rispetto alla variabile  $\underline{y}$ , allora la soluzione del problema di Cauchy, esiste ed è unica in un intorno del punto iniziale  $(t_0, \underline{y}_0)$ .*

*Il quesito principale, quando si risolve un problema di Cauchy, è di valutare o meno, l'esistenza di soluzioni globali, cioè definite su tutto  $\mathbb{R}$ . Si ha il seguente criterio: se si dimostra, a priori, che la soluzione, se esiste, è **limitata**; allora l'esistenza globale è assicurata.*

**Teorema 104 (di Peano)** *Se  $\underline{f}$  è una funzione soltanto **continua**, allora il problema di Cauchy ha almeno una soluzione locale (cioè ne può avere più di una).*

#### Esempio - Baffo di Peano

Sia dato il problema di Cauchy:

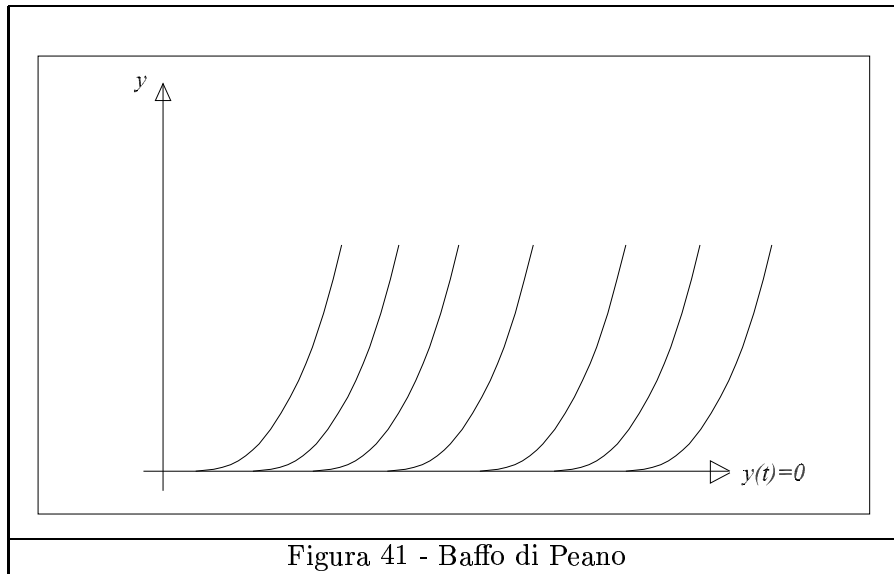
$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Notare che:  $f(t, y(t)) = \sqrt{|y(t)|}$  non è Lipschitziana!

Si osserva, banalmente, che  $y(t) \equiv 0$ , è soluzione del problema; inoltre si ha che  $\sqrt{|y(t)|} \geq 0$ , e quindi  $y(t)$ , se esiste, è monotona non decrescente. Essendo anche  $y(0) = 0$ , si ha che  $y(t) \geq 0 \forall t$ . Separando le variabili, nell'equazione differenziale, si ricava la soluzione:

$$y(t) = \frac{1}{4}(t - t_0)^2$$

Quindi si ha il seguente andamento:



## 20.4 Dipendenza Continua dai Dati

Si pone la questione se variando di poco i dati del problema, la soluzione varia di “poco”. Questa analisi è importante perché, nelle applicazioni spesso, la conoscenza dei dati iniziali, è solo approssimata e soggetta ad errori di misura.

Si ha il seguente:

**Teorema 105 (di Kamke)** *Se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema (103) di esistenza ed unicità locale di Cauchy, allora la soluzione dipende in maniera continua dai dati (su intervalli limitati). In altre parole, se si hanno i problemi:*

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)) \\ y_1(t_1) = \bar{y}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)) \\ y_2(t_2) = \bar{y}_2 \end{cases}$$

*Allora per ogni  $\epsilon > 0$  e per ogni intervallo  $[a, b]$  contenuto nell'intervallo comune di esistenza delle soluzioni, esiste un  $\delta > 0$  tale che:*

$$|t_1 - t_2| < \delta \quad |\bar{y}_2 - \bar{y}_1| < \delta \quad \max |f_1 - f_2| < \delta \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |y_1(t) - y_2(t)| < \epsilon$$

**Lemma 1 (di Gronwall)** *Siano  $u, v \in C^0(I)$  per un certo intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Sia inoltre  $u, v \geq 0$ . Allora, se fissato  $a \in I$ , esiste  $C > 0$ , tale che*

$$v(t) \leq C + \int_a^t u(\sigma)v(\sigma)d\sigma \quad t \geq a$$

*segue che:*

$$v(t) \leq C \cdot e^{\int_a^t u(\sigma)d\sigma} \quad t \geq a$$

## 20.5 Equazioni Autonome Scalari

Le equazioni differenziali Autonome sono particolari equazioni del tipo:

$$y'(t) = F(y(t)) \quad (20.1)$$

dove la funzione  $F$  non dipende esplicitamente dalla variabile “t (normalmente il tempo).

Per questo genere di equazioni, si ha che: se  $y(t)$  è una soluzione dell'equazione differenziale, allora lo è anche  $y(t + c)$  per ogni costante Reale  $c$ . Lo studio qualitativo di tali equazioni, passa attraverso l'identificazione dei luoghi di zero della funzione  $F$ ; si ha il seguente:

**Lemma 2 (Soluzioni Stazionarie)** *Sia  $y_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $F(y_0) = 0$ , allora la funzione  $y(t) = y_0$  è soluzione della (20.1). In particolare, se  $F$  è Lipschitziana, vale il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy (103), per cui nessun'altra soluzione può intersecare la soluzione  $y(t) = y_0$ .*

### 20.5.1 Esempio di Equazione Autonoma

Sia data l'equazione differenziale autonoma

$$y'(t) = 4y(t) \cdot (1 - y(t)) \quad (20.2)$$

Quindi si ha:  $F(y) = 4y \cdot (1 - y)$ .

Si osserva che  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ , e quindi resta verificato il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy; gli zeri di tale funzione sono:  $y = 0$  e  $y = 1$ . Per quanto detto precedentemente, le funzioni  $y_1(t) = 0$  e  $y_2(t) = 1$ , sono soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale (20.2), per cui non possono essere attraversate da altre soluzioni.

In particolare, le soluzioni con dato iniziale  $y_0 \in [0, 1]$  sono limitate dalla striscia  $0 \leq y \leq 1$ , per cui esistono per tutti i tempi (infatti non potrà esistere un  $t^*$  t.c.  $\lim_{t \rightarrow t^*} y(t) = \pm\infty$ ).

Dallo studio di  $F$ , si ha che  $F(y) > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1$ ; ciò implica che  $y'(t) > 0$  per  $0 < y < 1$  (e, analogamente  $y'(t) < 0$  per  $y < 0$  oppure  $y > 1$ ). Quindi, si è dimostrato che, nella striscia  $0 \leq y \leq 1$ , le soluzioni  $y(t)$  sono monotone crescenti, inoltre risultano limitate, per cui ammettono limite finito. Con opportune osservazioni (per esempio studio di concavità e convessità), si arriva alla conclusione che, se il dato iniziale  $y_0 \in [0, 1]$ , si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$$

Con ragionamenti simili, si può dedurre il comportamento delle soluzioni dell'equazione (20.2), per valori iniziali che stanno al di fuori della striscia  $0 \leq y \leq 1$ .

## 20.6 Stabilità secondo Ljapunov

Per descrivere matematicamente un fenomeno, lo si deve semplificare ed idealizzare. E' importante capire se sono state fatte troppe semplificazioni, oppure se le conclusioni (qualitative e quantitative), che si possono trarre dal modello, sono simili ai dati ottenuti tramite la sperimentazione diretta. Molti fenomeni possono essere descritti mediante un **sistema di equazioni differenziali**

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (20.3)$$

con le condizioni iniziali:  $y_i(t_0) = y_{i0}$ ; queste ultime, di solito sono ottenute mediante misure dirette o indirette, e di conseguenza sono soggette a errori di misura o di arrotondamento.

Il problema fondamentale, dunque, è quello di determinare l'influenza di una eventuale piccola variazione di tali dati iniziali, per comprendere, l'incidenza che tali variazioni hanno sul risultato globale del modello matematico rappresentativo.

Per capire meglio tale problematica, supponiamo che, variazioni arbitrariamente piccole dei dati iniziali abbiano un'incidenza notevole sulla variazione dei risultati finali, descritti mediante un modello matematico. Ebbene, tali risultati finali non hanno nessun valore ai fini di praticità descrittiva, per cui il modello non può essere usato per descrivere il fenomeno.

Il concetto di stabilità, di cui si sta parlando, e che tra l'altro, è legato al concetto di **dipendenza continua dai dati** (vedi Teorema n. 105), può essere espresso mediante la seguente:

**Definizione 88 (Stabilità di Ljapunov)** Sia

$\underline{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \dots, \phi_n(t))$  una soluzione del sistema (20.3); essa si dice **stabile secondo Ljapunov**, se  $\forall \epsilon > 0$  si può scegliere  $\delta(\epsilon) > 0$  tale che, per ogni soluzione  $\underline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_n(t))$  dello stesso sistema con i valori iniziali, si abbia:

$$|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |y_i(t) - \phi_i(t)| < \epsilon \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

per tutti i tempi  $t \geq t_0$ .

**Osservazione 42** La suddetta definizione, significa, in pratica, che soluzioni vicine all'istante iniziale, restano vicine per tutti i tempi  $t \geq t_0$ .

**Definizione 89 (Instabilità)** Se esiste un  $\delta > 0$ , arbitrariamente piccolo, ed una soluzione  $y_i(t)$ , per cui non sono soddisfatte le disuguaglianze della stabilità, allora la soluzione  $\underline{\phi}(t)$  si dice **instabile**.

**Definizione 90 (Stabilità Asintotica)** Se la soluzione  $\underline{\phi}(t)$  è stabile, ed inoltre si ha che

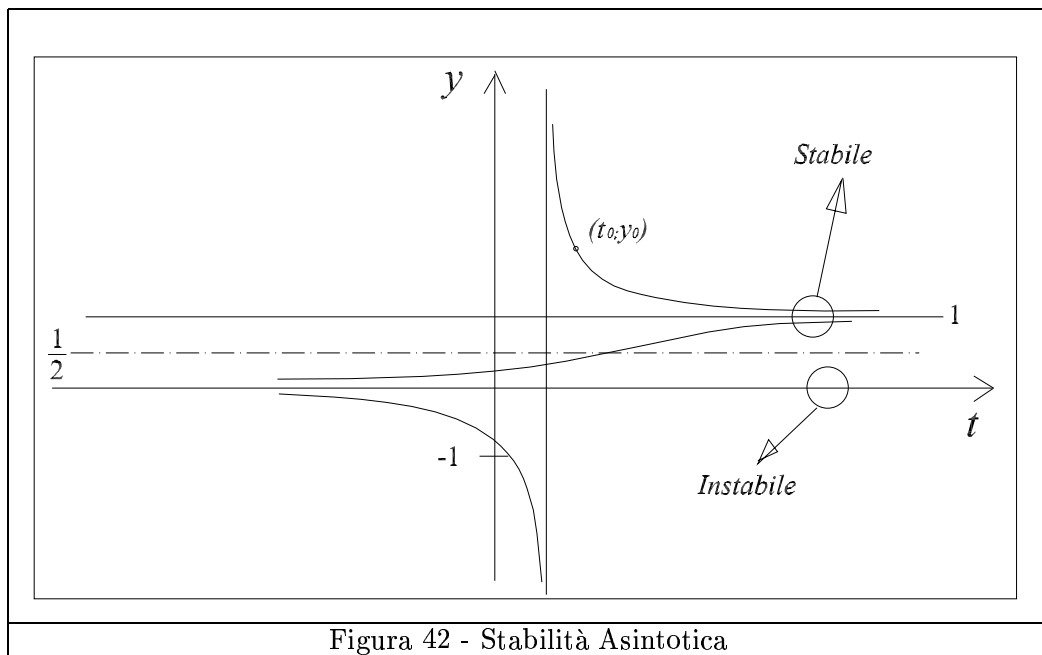
$$|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

allora la soluzione  $\underline{\phi}(t)$  si dice **Asintoticamente Stabile**.

### 20.6.1 Esempio di Stabilità Asintotica

Prendiamo come esempio, l'equazione vista precedentemente (20.2).

Si osserva che, le soluzioni che partono con  $y_0 \in (0, 1)$  sono monotone crescenti, e tendono alla soluzione  $y = 1$ ; quelle che partono con  $y_0 > 1$ , sono monotone decrescenti, e tendono, anch'esse, alla soluzione  $y = 1$ . Quindi la soluzione  $y = 1$  è **Asintoticamente Stabile**, e, secondo la definizione, il relativo  $\delta = 1$ . Mentre, la soluzione  $y = 0$ , è **instabile**, in quanto a partire da  $y_0 < 0$ , le soluzioni divergono (si suol dire che le soluzioni scoppiano in un tempo finito), per cui la loro differenza con la soluzione  $y = 0$  cresce indefinitamente.



Si ha il seguente:

**Lemma 3** *Sia  $F$  una funzione di classe  $C^1$  nel suo dominio. Sia inoltre  $F(\bar{y}) = 0$ . Allora  $y(t) = \bar{y}$  è soluzione stazionaria dell'equazione*

$$y' = F(y)$$

ed inoltre

- se  $F'(\bar{y}) < 0$ , la soluzione stazionaria è **Stabile**
- se  $F'(\bar{y}) > 0$ , la soluzione stazionaria è **Instabile**

## 20.7 Linearizzazione delle Equazioni Autonome

Sia dato un sistema differenziale del prim'ordine, di equazioni Autonome <sup>1</sup>

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t)) \quad (20.4)$$

Dove

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) &= (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)) \\ \underline{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \underline{f}(\underline{x}(t)) &= (f_1(\underline{x}(t)), f_2(\underline{x}(t)), \dots, f_n(\underline{x}(t))) \end{cases}$$

**Definizione 91 (Soluzioni Stazionarie)** *Si definisce Soluzione Stazionaria del sistema di equazioni differenziali, il vettore  $\underline{\tilde{x}}$  a componenti **costanti**, tali che:*

$$\begin{cases} f_1(\underline{\tilde{x}}) &= 0 \\ f_2(\underline{\tilde{x}}) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ f_n(\underline{\tilde{x}}) &= 0 \end{cases}$$

**Osservazione 43** *E' banale verificare che gli zeri di  $\underline{f}(\underline{x})$ , sono soluzioni del sistema di equazioni differenziali*

**Definizione 92 (Orbita o Traiettoria)** *Al variare di  $t$ , ogni soluzione  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , descrive parametricamente una curva (o ipercurva) che viene chiamata **Orbita** o **Traiettoria** del sistema. In particolare, per sistemi  $2 \times 2$  o  $3 \times 3$ , le Orbite sono curve nel piano (denominato Piano delle Fasi) o nello spazio rispettivamente.*

---

<sup>1</sup>Vedi pag. 148



**Teorema 106 (di Linearizzazione)** *Sia dato un sistema Non Lineare Autonomo:*

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$$

*con  $\underline{f}(\underline{x})$  sufficientemente regolare (diciamo Analitica <sup>2</sup>);  
si costruisce il sistema lineare:*

$$y'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{\underline{x}}) y_j \quad \text{Sistema Linearizzato} \quad (20.5)$$

*Se il sistema (20.5), ha in  $\tilde{\underline{x}}$ , un **Fuoco**, un **Nodo** o un **Punto di Sella**<sup>3</sup> allora la soluzione stazionaria  $\tilde{\underline{x}}$ , è dello stesso tipo, anche per il sistema non lineare.*

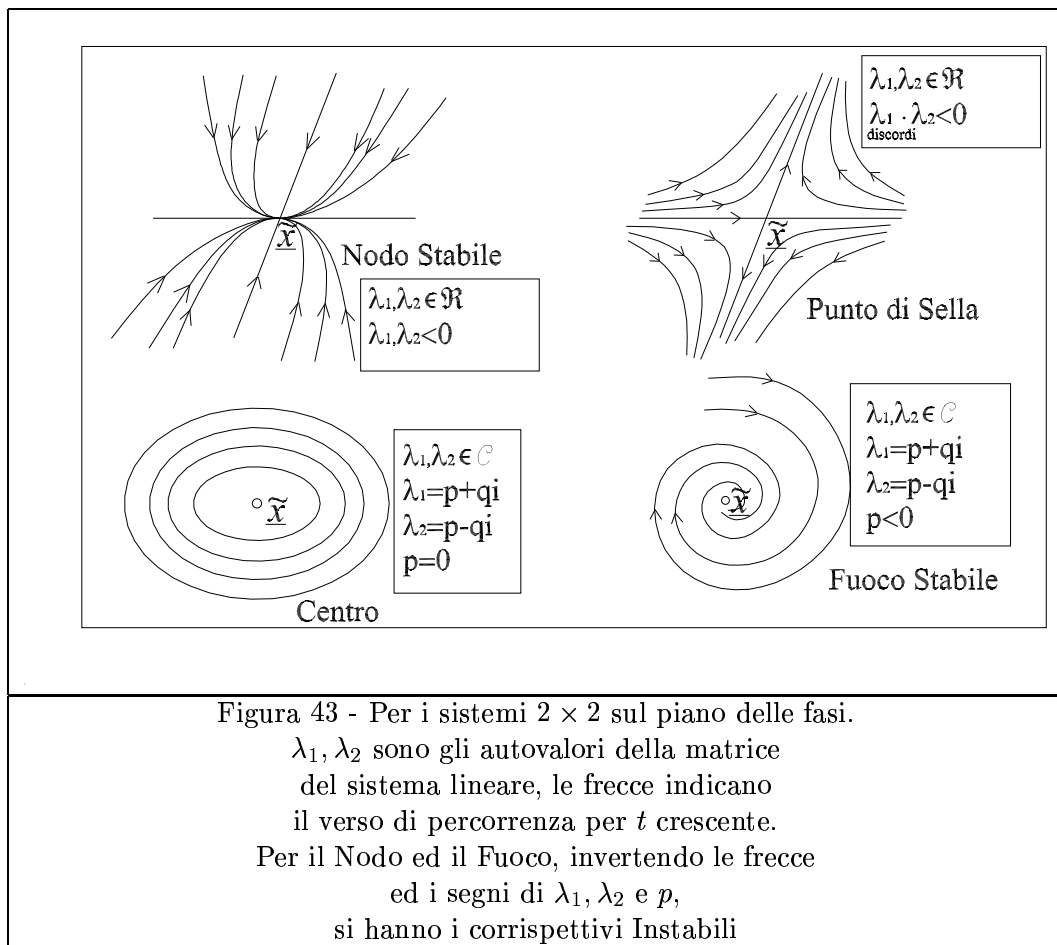
**Osservazione 44** *Nelle ipotesi del teorema precedente, il carattere di stabilità asintotica o di instabilità della soluzione stazionaria  $\tilde{\underline{x}}$ , si conserva passando dal sistema lineare a quello non lineare.*

*Il sistema (20.5) costituisce il **Sistema Linearizzato** relativo al sistema non lineare  $\underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t))$ ; in generale, sotto le ipotesi del teorema precedente, si ha che, in un intorno di ciascuna delle soluzioni stazionarie, le soluzioni del corrispondente sistema linearizzato, costituiscono un'approssimazione delle soluzioni del sistema non lineare.*

---

<sup>2</sup>Vedi pag.92

<sup>3</sup>Vedi figura seguente



**Teorema 107 (Stabilità Asintotica)** Se gli autovalori della matrice

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x})$$

del sistema (20.5) sono tutti distinti e hanno tutti parte reale **Negativa**, allora la soluzione  $\tilde{x}$  del sistema non lineare è **Asintoticamente Stabile**.

Se almeno uno degli autovalori della matrice

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x})$$

del sistema (20.5) ha parte reale **Positiva**, allora la soluzione  $\tilde{x}$  del sistema non lineare è **Instabile**.

## 20.8 Esempio di Linearizzazione

Supponiamo di voler linearizzare la seguente equazione differenziale non lineare:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2} - \sin(\theta)$$

Poniamo

$$\begin{cases} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \end{cases}$$

Quindi si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} - \sin(x_1) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2) &= x_2 \\ f_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} - \sin(x_1) \end{cases}$$

Troviamo le soluzioni Stazionarie del Sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) &= 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ oppure } x_1 = \frac{5\pi}{6} \quad (\text{nel semiperiodo } \pi) \end{cases}$$

Quindi, con la notazione utilizzata in precedenza:

$$\begin{cases} \underline{\tilde{x}}_1 &= \left(\frac{\pi}{6}, 0\right) \\ \underline{\tilde{x}}_2 &= \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right) \end{cases}$$

La Matrice del sistema linearizzato, è data da:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Studiamo la soluzione stazionaria  $\underline{\tilde{x}}_1$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare ad essa associato, è:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \end{cases}$$

Gli Autovalori di  $A$  sono:  $\lambda_1 = j\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$   $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$   
quindi  $\underline{\tilde{x}}_1$  è un **Centro soltanto per il sistema linearizzato**, mentre, per quello non lineare non si può affermare nulla.

Studiamo la soluzione stazionaria  $\underline{\tilde{x}_2}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare ad essa associato, è:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \end{cases}$$

Gli Autovalori di  $A$  sono:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

quindi  $\underline{\tilde{x}_2}$  è una **Sella** sia per il sistema lineare, sia per quello non lineare.

## Capitolo 21

# La Trasformata di Laplace

Di seguito vengono riportate le Trasformate ed Antitrasformate di uso più frequente:

### 21.1 Trasformate ed Anti-trasformate di Funzioni

$f(t)$ (Funzione)	$\leftrightarrow$	$F(s)$ (Trasformata)
$(f * g)(t)$ (Convoluzione)		$F(s) \cdot G(s)$
$t^k \quad (k \in \mathbb{N})$ Se $k = 1$ si ha la 'Rampa'		$\frac{k!}{s^{(k+1)}}$
$t^k e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$		$\frac{k!}{(s-a)^{(k+1)}}$
$\sin(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R})$		$\frac{\cos(\varphi)\omega + \sin(\varphi)s}{s^2 + \omega^2}$

$f(t)$ (Funzione)	$\leftrightarrow$	$F(s)$ (Trasformata)
$\cos(\omega t + \varphi)$		$\frac{\cos(\varphi)s - \sin(\varphi)\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$		$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$		$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$		$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$		$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\alpha \cdot \delta(t)$ (Delta di Dirac) $\alpha \in \mathbb{R}$		$\alpha$ Peso dell'Impulso
$H(t)$ (Gradino Unitario) (Funzione di Heavyside)		$\frac{1}{s}$

**Definizione 93 (Trasformata di Laplace)** Data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oppure  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) definita e continua in  $(0, +\infty)$  tale che:

- $f(t) = 0$  per  $t < 0$
- $|f(t)| < M \cdot e^{\alpha t}$  tranne che in punti in cui vi siano Impulsi di Dirac. Questa condizione fa sì che la funzione  $f(t)$  appartenga alla **Classe Esponenziale**

si definisce **Trasformata di Laplace**, la funzione:

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)e^{-st}dt \quad (21.1)$$

Dove la variabile  $s \in \mathbb{C}$ . L'integrale che costituisce la definizione di Trasformata di Laplace, è definito solo per opportuni valori della variabile  $s$ , in particolare dovrà risultare, se è  $s = \sigma + j\omega$ :

$$\sigma > \sigma_0$$

Dove il termine  $\sigma_0$  dipende dalla funzione  $f(t)$ , e prende il nome di **Ascissa di Convergenza**, ed il semipiano complesso che così si viene a creare è denominato **Semipiano di Convergenza** della Trasformata di Laplace.

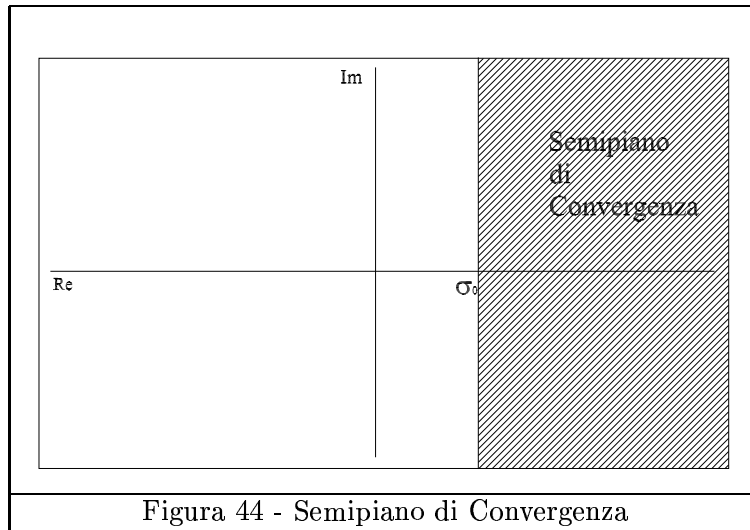


Figura 44 - Semipiano di Convergenza

Se la funzione  $f(t)$ , presenta un impulso di Dirac, nell'origine, allora bisogna dare un'altra definizione della Trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}_-[f(t)] = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (21.2)$$

“Origine Compresa nell'intervallo di integrazione”.

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0+}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (21.3)$$

“Origine Non Compresa nell'intervallo di integrazione”.

**Definizione 94 (Antitrasformata di Laplace)** In analogia con quanto detto, si definisce **Antitrasformata di Laplace** l'operazione inversa della trasformazione, ovvero  $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]] = f(t)$ ; essa è definita mediante il seguente integrale:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st} ds$$

**Definizione 95 (Impulso di Dirac)** Quello che viene chiamato **Impulso di Dirac** ed indicato con  $\delta(t)$  non è una funzione, bensì una **Distribuzione** (ovvero una generalizzazione del concetto di Funzione); ed è tale che:

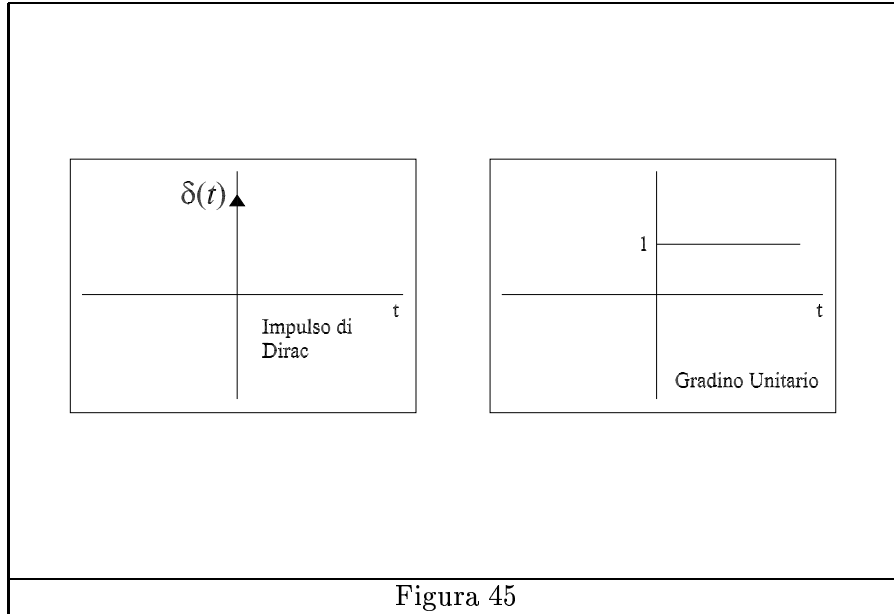
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \neq 0 \\ \text{Indefinita} & \text{per } t = 0 \text{ ma tale che } \forall \epsilon > 0 \text{ si abbia: } \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Definita la funzione a gradino unitario:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che:

$$\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt} \quad \text{'Nel senso delle distribuzioni'}$$



**Definizione 96 (Prodotto di Convoluzione)** Date due funzioni  $f$  e  $g$  di classe esponenziale, si definisce, **Prodotto di Convoluzione**, e si indica con  $f * g$ , la seguente funzione:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

*Il Prodotto di Convoluzione è Commutativo ed Associativo*

## 21.2 Proprietà basilari

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g) \quad \text{'Linearità'} \quad (21.4)$$

**N.B.** La Trasformata del prodotto di due funzioni **non** è il prodotto di Trasformate!  $\mathcal{L}(f \cdot g)(s) \neq F(s) \cdot G(s)$

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Leftrightarrow f = g \quad \text{'Unicità della Trasformata'} \quad (21.5)$$

$$\mathcal{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (21.6)$$

$$\mathcal{L}\left(f'\right)(s) = sF(s) - f(0) \quad \text{Se si usa la definizione (21.1)} \quad (21.7)$$



$$\mathcal{L}_+(f')(s) = sF(s) - f(0^+) \quad \text{Se si usa la definizione (21.2)} \quad (21.8)$$

$$\mathcal{L}_-(f')(s) = sF(s) - f(0^-) \quad \text{Se si usa la definizione (21.3)} \quad (21.9)$$

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad \text{Se si usa la def. (21.1)} \quad (21.10)$$

$$\mathcal{L}(f^{(k)})(s) = s^kF(s) - \sum_{i=1}^k s^{k-i}f^{(i-1)}(0) \quad (\text{Derivata k-esima}) \quad (21.11)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(s)}{s} \quad (21.12)$$

**Lemma 4 (Traslazione nel Dominio del Tempo)** Sia  $f(t)$  tale che  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , allora:

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = F(s)e^{-s\tau}$$

**Lemma 5 (Traslazione nel Dominio della Frequenza)** Sia  $f(t)$  tale che  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , allora:

$$\mathcal{L}[f(t)e^{\alpha t}] = F(s - \alpha)$$

**Teorema 108 (del Valore Iniziale)** Sia  $f(t)$  tale che  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , allora:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Questo teorema è SEMPRE VERO.

**Teorema 109 (del Valore Finale)** Sia  $f(t)$  tale che  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , ed esista finito il  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ ; allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Questo teorema è valido soltanto se il limite di  $f(t)$  ESISTE FINITO.

### 21.3 Derivata della Trasformata

Sia  $f$  una funzione di classe esponenziale, e sia  $F(s)$  la sua trasformata di Laplace; allora è:

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-st} dt \quad (21.13)$$

## 21.4 Tecniche di Anti-Trasformazione

Nell'ambito ingegneristico, si ha, di solito, a che fare con funzioni del tipo riportato nella tabella di conversione, per cui l'espressione che costituisce la Trasformata di una qualsiasi combinazione o prodotto di funzioni, sarà del tipo:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (21.14)$$

Ovvero un rapporto di polinomi. Si noti come al Denominatore si è posto un polinomio **Monico**, cioè un polinomio in cui la  $s$  di grado massimo, ha come coefficiente 1 (ovvero il coefficiente di  $s^n$ , è 1). Se il denominatore non fosse Monico, supponiamo che il detto coefficiente sia  $\lambda$ , basterebbe dividere numeratore e denominatore per tale  $\lambda$ , e si otterrebbe ancora l'espressione di (21.14) (con le opportune modifiche dei coefficienti  $b_m, b_{m-1}, \dots$  ed  $a_n, a_{n-1}, \dots$ ).

Quindi, senza perdere in generalità, si può sempre supporre di avere il rapporto (21.14).

Il grado del Numeratore è  $m$ , mentre quello del Denominatore è  $n$ ; si possono avere i due casi seguenti:

1.  $m \geq n$
2.  $m < n$

### 21.4.1 Caso 1: $m \geq n$

In questo caso si effettua la divisione dei polinomi, ottenendo un quoziente intero, più un resto, ovvero:

$$F(s) = q(s) + \frac{r(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

in cui  $r(s)$  è un polinomio di grado  $n - 1$ .

Quindi per Anti-Trasformare  $F(s)$  (per la linearità della Trasformata di Laplace), è sufficiente Anti-Trasformare  $q(s)$  e  $\frac{r(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$  e poi sommare i risultati. Nei casi che si incontrano di solito,  $q(s) = k$  con  $k$  costante, la cui anti-trasformata è l'Impulso di Dirac moltiplicato  $k$ :  $k\delta(t)$ .

Il problema sarà antitasformare:  $\frac{r(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$  Come abbiamo già affermato  $r(s)$  è un polinomio di grado  $n - 1$ , quindi ci si riconduce al:

**21.4.2 Caso 2:  $m < n$** 

Prendiamo al solito:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

La prima cosa da fare è Fattorizzare il Denominatore, ovvero trovare gli zeri del Denominatore <sup>1</sup> comunemente chiamati **POLI** di  $F(s)$ .

Come è risaputo dal teorema fondamentale dell'Algebra, un polinomio di grado  $n$ , ha esattamente  $n$  soluzioni, Reali o Complesse (con le Complesse Coniugate).

Si possono avere i due seguenti casi:

i) vi sono  $n$  Poli, distinti:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

ii) vi è almeno un Polo con Molteplicità  $h$ .

- Nel caso di Poli tutti distinti, si potrà scrivere:

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \frac{A_3}{s - p_3} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n}$$

Dove i termini  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  (Reali o Complessi), prendono il nome di **Residui Polari**.

Il Generico Residuo Polare, si calcola mediante la relazione:

$$A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [F(s) \cdot (s - p_i)]$$

Ricavati tutti gli  $n$  Residui Polari, la Trasformata di  $F(s)$  si calcolerà immediatamente, ricordando che

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A_i}{s - p_i} \right] = A_i e^{p_i t} \quad (\text{Vedi la Tabella})$$

- Nel caso vi sia un Polo (per esempio  $p_1$ ) di molteplicità  $h$ , si potrà scrivere:

$$F(s) = \frac{A_{1,h}}{(s - p_1)^h} + \frac{A_{1,h-1}}{(s - p_1)^{h-1}} + \dots + \frac{A_{11}}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \frac{A_3}{s - p_3} + \dots$$

Dove  $p_2, p_3$  ecc. hanno molteplicità pari ad 1, ed i termini  $A_2, A_3$  ecc. sono Residui Polari (ATTENZIONE: i termini  $A_{1,h}, A_{1,h-1}, \dots$  NON sono Residui Polari, mentre  $A_{11}$  lo è. In generale sono Residui Polari quei termini, al cui denominatore compare un binomio di 1° grado).

---

<sup>1</sup> Gli zeri del Numeratore, sono denominati **Zeri** di  $F(s)$

I termini  $A_2, A_3$  ecc. si calcolano col metodo visto prima, i termini  $A_{1,h}, A_{1,h-1}$  ecc. si ricavano utilizzando la relazione:

$$A_{1,h-i} = \frac{1}{i!} \cdot \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^i}{ds^i} \left[ F(s)(s - p_1)^h \right] \quad (\text{N.B: è una derivata } i\text{-esima!})$$

Al solito, per calcolare l'Anti-Trasformata di  $F(s)$ , una volta calcolati tutti i termini  $A_{ij}$ , basta sommare fra loro le Anti-Trasformate dei singoli addendi, consultando la solita Tabella di Conversione.

**Lemma 6 (dei Residui Polari)** *Dati  $n$  Residui Polari,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , si ha che:*

$$\sum_{i=1}^n A_i = \begin{cases} 0 & \text{se } n - m > 1 \\ b_m & \text{se } n - m = 1 \end{cases}$$

*Dove  $n$  = grado del denominatore, ed  $m$  = grado del numeratore; e la quantità  $n - m$  prende il nome di **Eccesso Poli Zeri**.*

### 21.4.3 Esempio di Antri-Trasformazione

Sia data la seguente **Funzione di Trasferimento**<sup>2</sup>:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3(s+2)(s^2+4)}$$

In questo caso il denominatore è già fattorizzato, ed i poli di  $F(s)$  sono:

Polo	Molteplicità
$s_1 = 0$	$h = 3$
$s_2 = -2$	$h = 1$
$s_3 = j2$	$h = 1$
$s_4 = -j2$	$h = 1$

Si può scrivere:

$$F(s) = \frac{A_{1,3}}{s^3} + \frac{A_{1,2}}{s^2} + \frac{A_{1,1}}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s-j2} + \frac{A_3^*}{s+j2}$$

Notare che le soluzioni  $s_3$  ed  $s_4$  sono complesse coniugate, quindi anche  $A_3$  ed  $A_3^*$  saranno complessi coniugati e quindi verrà calcolato soltanto  $A_3$ .

$$A_2 = \left. \frac{s+1}{s^3(s^2+4)} \right|_{s=-2} = \frac{1}{64}$$

Da notare che non si è usato il limite, come descritto nella relazione precedente, ciò deriva dal fatto che  $F(s) \cdot (s+2) = \frac{s+1}{s^3(s^2+4)}$ ; quindi il limite suddetto corrisponde a calcolare quest'ultima espressione in  $s = -2$ , come indicato. In generale, quindi non si dovrà mai calcolare un limite.

$$A_{1,3} = \left. \frac{s+1}{(s+2)(s^2+4)} \right|_{s=0} = \frac{1}{8}$$

$$A_{1,2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{s+1}{(s+2)(s^2+4)} \right) \Big|_{s=0} = - \frac{2s^3 + 5s^2 + 4s - 4}{(s+2)^2(s^2+4)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{16}$$

$$A_3 = \left. \frac{s+1}{s^3(s+2)(s+j2)} \right|_{s=j2} = \frac{3-j}{128} \quad \text{da cui} \quad A_3^* = \frac{3+j}{128}$$

Per il Lemma dei Residui Polari <sup>3</sup>, si ha:

$$A_{1,1} + A_2 + A_3 + A_3^* = 0 \Rightarrow A_{1,1} = -\frac{1}{64} - \frac{6}{128} = -\frac{1}{16}$$

Il termine  $A_{1,1}$  si poteva calcolare anche con:

$$A_{1,1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{s+1}{(s+2)(s^2+4)} \right) \Big|_{s=0} =$$

<sup>2</sup>di solito si indica con tale nome la funzione  $F(s)$

<sup>3</sup>Vedi pag. 163

$$\left. \frac{3s^5 + 12s^4 + 16s^3 - 24s^2 - 48s - 32}{(s+2)^3(s^2+4)^3} \right|_{s=0} = -\frac{1}{16}$$

Si noti l'utilità del Lemma dei Residui Polari!

In definitiva si ha:

$$F(s) = \frac{1/8}{s^3} + \frac{1/16}{s^2} - \frac{1/16}{s} + \frac{1/64}{s+2} + \frac{(3-j)/128}{s-j2} + \frac{(3+j)/128}{s+j2}$$

Da cui antitrasformando, si ricava (tenendo presente la definizione di esponenziale complesso):

$$f(t) = \left[ \frac{1}{64}e^{-2t} + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{16} - \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{10}}{64} \cos(2t + 0.322) \right] \cdot H(t)$$

Dove  $0.322 = \arctan(\frac{1}{3})$  è l'argomento<sup>4</sup> di  $A_3$ , ed  $H(t)$  è la funzione a Gradino.

---

<sup>4</sup>vedi pag. 50

## 21.5 Applicazione della Trasformata di Laplace

Una delle maggiori applicazioni del concetto di Trasformata di Laplace, consiste nella risoluzione di equazioni differenziali lineari di ordine (n) a coefficienti costanti. Di seguito viene riportato un esempio di risoluzione di un'equazione del terz'ordine: sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - 8y'' + 16y' = (16t + 4)e^{4t} \\ y''(0) = 1; y'(0) = -1; y(0) = 0 \end{cases}$$

Si ha

$$y''' = 8y'' - 16y' + (16t + 4)e^{4t}$$

Si costruiscono le funzioni  $x(t)$  e  $z(t)$ , tali che:

$y' = x$  e  $x' = y'' = z$ , dalle quali, facilmente, deriva che  $z' = y'''$ .

L'equazione del terz'ordine, iniziale, si riduce quindi ad un sistema di tre equazioni differenziali lineari del prim'ordine, che è il seguente:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = x \\ z' = 8z - 16x + (16t + 4)e^{4t} \\ x(0) = -1; y(0) = 0; z(0) = 1 \end{cases}$$

Applicando la trasformazione a tutti i membri delle suddette equazioni, e ricordando la proprietà (21.7), si ha il seguente sistema di equazioni algebriche lineare:

$$\begin{cases} sX - x(0) = Z \\ sY - y(0) = X \\ sZ - z(0) = 8Z - 16X + \frac{16}{(s-4)^2} + \frac{4}{s-4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sX - Z = -1 \\ X - sY = 0 \\ 16X + (s-8)Z = 1 + \frac{16}{(s-4)^2} + \frac{4}{s-4} \end{cases}$$

Dove  $\frac{16}{(s-4)^2} = \mathcal{L}(16te^{4t})$  e  $\frac{4}{s-4} = \mathcal{L}(4e^{4t})$ ; e con le lettere  $X, Y, Z$  si sono indicate, rispettivamente, le trasformate delle funzioni  $x(t), y(t), z(t)$ .

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} X(s) = -\frac{s^3 - 17s^2 + 84s - 144}{(s-4)^4} \\ Y(s) = -\frac{s^3 - 17s^2 + 84s - 144}{s(s-4)^4} \\ Z(s) = \frac{s^3 + 12s^2 - 112s + 256}{(s-4)^2(s^2 - 8s + 16)} \end{cases}$$

Dalla funzione  $Y(s)$ , antitrasformandola, si ricava la:

$$y(t) = \left[ \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{4}t - \frac{9}{16} \right] e^{4t} + \frac{9}{16}$$

Che è la soluzione dell'equazione del terz'ordine, di partenza!

## Capitolo 22

# Funzioni Complesse

Nel seguito, verrà indicata con  $j$  l'unità immaginaria; cioè  $j$  è tale che:  $j^2 = -1$ .

### 22.1 Olomorfia

**Definizione 97 (Funzione Olomorfa)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , e sia  $z_0 \in \Omega$ .

Si definisce, derivata di  $f$ , calcolata in  $z_0$ , il seguente limite:

$$f'(z_0) \triangleq \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Se tale limite esiste finito, si dirà che  $f$  è **olomorfa** in  $z_0$ .

**Teorema 110 (Condizioni di Cauchy-Riemann)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , nel seguente modo:  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ , con  $(z = x + jy)$  e  $(u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$ .

Condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$  sia olomorfa in  $\Omega$ , è:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

**Corollario 8** Se sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann in  $\Omega$ , allora  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  sono differenziabili in  $\Omega$ .

**Definizione 98 (Integrale di funzione Complessa)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita e continua in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , nel seguente modo:

$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ , con  $(z = x + jy)$  e  $(u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$ .

Sia  $\{\gamma\} \subset \Omega$  una curva semplice e regolare, di estremi  $z_1$  e  $z_2$ . Si definisce integrale di  $f(z)$  su  $\gamma$ , la seguente espressione:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + j \int_{\gamma} (v dx + u dy)$$



Dove  $u = u(x, y)$   $v = v(x, y)$ .

**Teorema 111 (I Teorema di Cauchy)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , olomorfa in  $\Omega \subset \mathbb{C}$  **semplicemente connesso**; allora si ha:

$$\oint_{+\gamma} f(z) dz = 0$$

Per ogni curva **chiusa** sufficientemente regolare, contenuta in  $\Omega$ .

**Teorema 112 (II Teorema di Cauchy)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , olomorfa nell'aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , e sia  $z_0 \in \Omega$ , allora si ha:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{+\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**Teorema 113 (Indipendenza del cammino di integrazione)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , olomorfa nell'aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , e siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve regolari contenute in  $\Omega$  con gli estremi in comune, oppure siano due curve chiuse tali che, la parte  $D$  di piano complesso delimitata dalle due curve, sia contenuta in  $\Omega$ ; allora si ha:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

**Teorema 114 (Esistenza della Primitiva)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , olomorfa nell'aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  **semplicemente connesso**; allora  $f$  ammette primitiva, e tale primitiva è una funzione olomorfa in  $\Omega$ .

**Osservazione 45** Se  $\Omega$  non è semplicemente connesso, la funzione olomorfa  $f$  ammette localmente una primitiva, ma può non ammetterla globalmente.

## 22.2 Serie di Potenze

**Teorema 115 (Olomorfia delle serie di potenze)** Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

e sia  $r > 0$  il raggio di convergenza della serie. Allora  $f$  soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann nel cerchio aperto di convergenza ed è ivi olomorfa.

**Corollario 9** Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

allora si ha:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

**Teorema 116 (Sviluppo di Laurent)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , olomorfa nell'aperto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , eccetto che in un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$ ; si ha:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (22.1)$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Dove  $\gamma$  è una qualsiasi curva semplice e regolare, contenuta in  $\Omega$ , che circonda  $z_0$  una sola volta.

La serie bilatera (22.1) è denominata 'Sviluppo di Laurent' di  $f$  in  $z_0$ .

**Corollario 10 (Olomorfia ed Analiticità)** Ogni funzione olomorfa, è sviluppabile in serie di potenze; ed è quindi Analitica.

**Definizione 99 (Singolarità Essenziale)** Se esistono infiniti  $n < 0$ , per cui  $c_n \neq 0$ ; allora  $z_0$  prende il nome di **Singolarità Essenziale**.

**Definizione 100 (Polo)** Se  $c_n \neq 0$ , per un numero finito di valori negativi, allora  $z_0$  è detto Polo, ed il massimo  $|n|$  per cui  $c_n \neq 0$ , si chiama ordine del polo.

**Definizione 101 (Residuo)** Si definisce Residuo di  $f$  in  $z_0$ , il coefficiente di Laurent, calcolato in  $n = -1$ ; cioè:

$$\text{Res}(f, z_0) \triangleq c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

dove  $\gamma$  è una qualsiasi curva, che circonda  $z_0$  una sola volta, e che non contenga altre singolarità.

**Teorema 117 (Calcolo del Residuo)** Sia  $z_0$  un polo di ordine  $k$  per  $f$ ; allora:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} D_z^{(k-1)} \left\{ (z - z_0)^k f(z) \right\}$$

In particolare, se  $z_0$  è un polo di ordine 1, si ha:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

**Corollario 11 (Funzioni Fratte)** Sia  $f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ , dove  $n(z)$  e  $d(z)$  sono funzioni olomorfe in  $z_0$ . Se  $z_0$  è uno zero di ordine  $k$  per  $d(z)$ , allora  $z_0$  è un **polo** di ordine  $k$  per  $f(z)$

**Corollario 12 (Residuo nel polo di ordine 1)** Sia  $f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ , dove  $n(z)$  e  $d(z)$  sono funzioni olomorfe in  $z_0$ , e  $z_0$  **un polo di ordine 1 per**  $f(z)$ ; si ha:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)} \quad (\text{N.B. solo se il polo è di ordine 1})$$

**Teorema 118 (dei Residui)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definita ed olomorfa in  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ; e siano  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), punti singolari di  $f(z)$ . Si ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^k \text{Res}(f, z_i)$$

Dove  $\gamma$  è una curva semplice e regolare, che circonda tutte le “ $k$  singolarità”.

### 22.2.1 Calcolo degli Integrali Principali di Cauchy

Si voglia calcolare:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

Dove  $f(x)$  è una funzione reale di variabile reale dotata soltanto di singolarità isolate, nessuna delle quali giacente sull’asse reale.

Si consideri la funzione  $f(z)$ , con la stessa espressione di  $f(x)$ , ma con  $z \in \mathbb{C}$ . Dal teorema dei Residui, si ha:

$$\int_{+\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{+\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^k \text{Res}(f, z_i)$$

Dove, al solito, i  $z_i$  sono punti singolari per  $f(z)$ ; e la curva  $\gamma$  è tale che:  $\{\gamma\} = \{\Gamma_R\} \cup \{[-R, R]\}$ , e deve contenere tutti i punti singolari  $z_i$ . (Vedi figura 22.2.1).

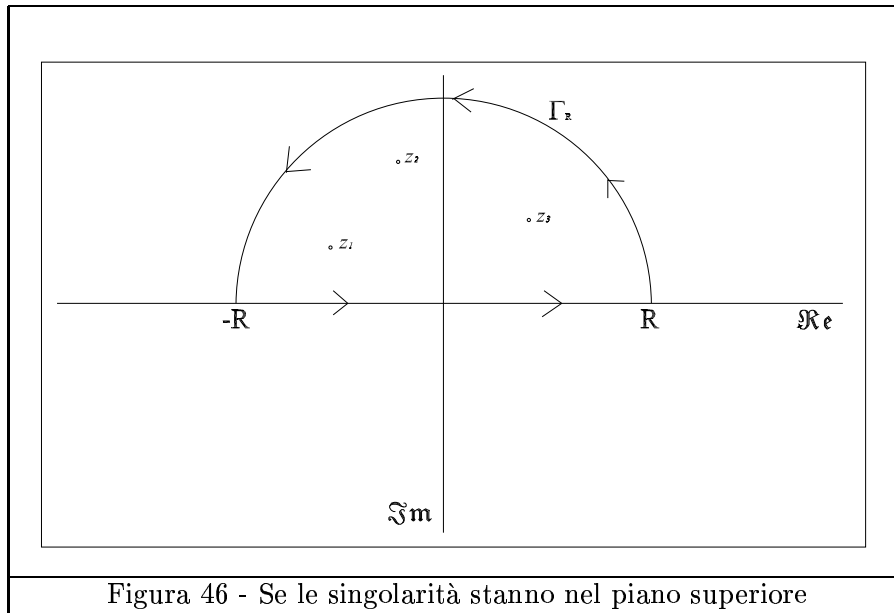


Figura 46 - Se le singolarità stanno nel piano superiore

Da ciò, segue:

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi j \sum_{i=1}^k \text{Res}(f, z_i)$$

**OSSERVAZIONE Importante:** se

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\Gamma_R} f(z) dz = 0 \quad (22.2)$$

Allora si ha la relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi j \sum_{i=1}^k \text{Res}(f, z_i) \quad (22.3)$$

che permette, per l'appunto, di calcolare l'integrale principale di Cauchy.

Se i punti singolari giacessero sul semipiano inferiore (semicirconferenza simmetrica alla precedente, rispetto all'asse Reale), si avrebbe:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = -2\pi j \sum_{i=1}^k \text{Res}(f, z_i)$$

**N.B.** per sfruttare la (22.3) è **necessario che sia valida la (22.2)**; per questo disponiamo dei due seguenti Lemmi:

**Lemma 7 (di Convergenza)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , e sia

$$|f(Re^{j\theta})| \leq \frac{M}{R^\alpha}$$

con  $M = \text{cost.}$ ,  $R > 0$  ed  $\alpha > 1$ ; allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\Gamma_R} f(z) dz = 0$$

**Lemma 8 (di Jordan)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , e sia  $|f(z)| \leq \varphi(|z|)$ ; dove  $\varphi(|z|)$  è una funzione reale, non negativa ed infinitesima per  $|z| \rightarrow +\infty$ . Sia, inoltre  $\omega > 0$ ; allora si ha:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{j\omega z} f(z) dz = 0$$

Se  $\omega < 0$ , vale lo stesso, considerando la curva  $\Gamma_R$  che ruota nel semipiano inferiore.

**Teorema 119 (Integrale dell'arco di Circonferenza)** Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  *Olomorfa*, e sia  $z_0$  un *polo di ordine* 1 per  $f(z)$ ; allora:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{+C_\epsilon} f(z) dz = (\beta - \alpha) j \text{Res}(f, z_0)$$

Dove  $C_\epsilon$  è l'arco di circonferenza di centro  $z_0$ , e raggio  $\epsilon$ , compreso fra  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$ .

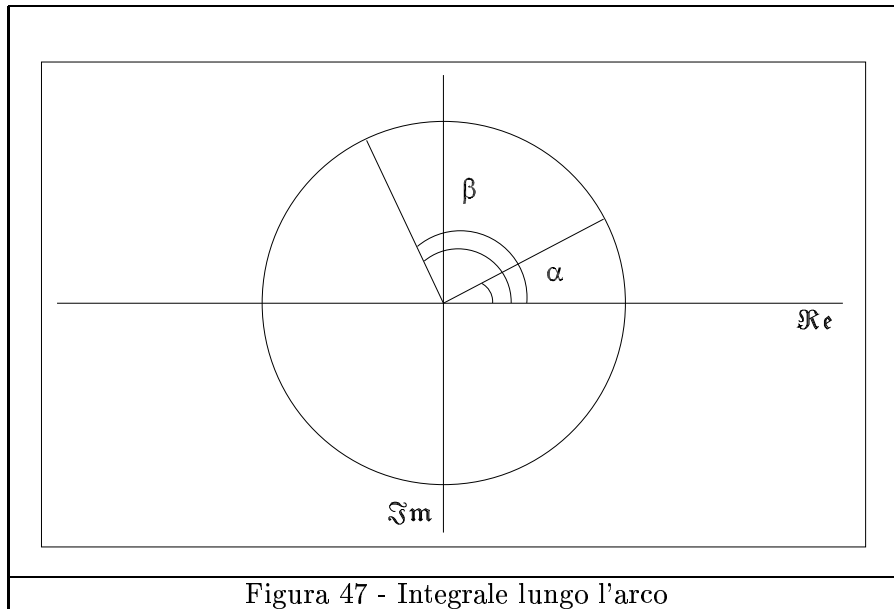


Figura 47 - Integrale lungo l'arco

## Capitolo 23

# Esponenziale di matrice

### 23.1 Parte Teorica

In questo capitolo verranno illustrati due metodi generali per calcolare l'esponenziale di matrice. La teoria dell'esponenziale di matrice è utile a risolvere sistemi di equazioni differenziali lineari del prim'ordine. Questo metodo è alternativo a quello della Trasformata di Laplace.

**Definizione 102 (Esponenziale di matrice)** *Sia  $A$  una matrice quadrata di dimensione  $n$ . Si definisce esponenziale di matrice la seguente serie:*

$$e^A \triangleq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

**Teorema 120 (Cayley-Hamilton)** *Sia  $P(\lambda)$  il polinomio caratteristico della matrice quadrata  $A$ <sup>1</sup>, allora:*

$$P(A) = 0.$$

La definizione precedente dell'esponenziale di matrice, e la tesi del teorema di Cayley-Hamilton, servono per effettuare la dimostrazione del metodo dell'esponenziale di matrice, che non verrà trattata.

---

<sup>1</sup>Si ricordi che il polinomio caratteristico di una matrice quadrata, si ottiene risolvendo:  
 $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### 23.2.1 Primo Metodo

1. si determina il polinomio caratteristico  $P(\lambda)$  di  $A$ :<sup>[2]</sup>

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. si determinano tutti gli autovalori <sup>3</sup> della matrice  $A$ ; siano essi:

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

Determinati gli autovalori di  $A$ , si possono avere i due seguenti casi:

- Gli autovalori sono tutti **DISTINTI**, allora si pone:

$$e^{At} = E_1 e^{\lambda_1 t} + E_2 e^{\lambda_2 t} + E_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + E_n e^{\lambda_n t} \quad (23.1)$$

- Esiste almeno un autovalore con molteplicità maggiore di uno; allora si ha la seguente:

**Osservazione 47 (sulla molteplicità dei  $\lambda_i$ )** *Se per esempio*

- $\lambda_1$  ha molteplicità  $\mu_1 = 3$  allora si deve porre:

$$e^{At} = E_1 e^{\lambda_1 t} + E_2 t e^{\lambda_1 t} + E_3 t^2 e^{\lambda_1 t} + \dots + E_{n+2} e^{\lambda_n t} \quad (23.2)$$

- $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno molteplicità  $\mu_1 = 2$  e  $\mu_2 = 2$ , allora:

$$e^{At} = E_1 e^{\lambda_1 t} + E_2 t e^{\lambda_1 t} + E_3 e^{\lambda_2 t} + E_4 t e^{\lambda_2 t} + E_5 e^{\lambda_3 t} + \dots + E_{n+2} e^{\lambda_n t}$$

Le equazioni (23.1) ed (23.2) devono essere verificate  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Si effettua la derivazione membro a membro, fino all'ordine  $n-1$  e si calcola ciascuna derivata in  $t=0$ , ottenendo il sistema seguente di  $n$  equazioni in  $n$  incognite (comprendendo anche l'equazione (23.1), dove le incognite sono Matrici):

---

<sup>2</sup>Con  $I$  matrice identità di dimensione pari a quella di  $A$ .

<sup>3</sup>Risolvendo  $P(\lambda) = 0$



$$\left\{ \begin{array}{lll} D^{(0)}(e^{At}) = e^{At} & \xrightarrow{t=0} & I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n \\ D^{(1)}(e^{At}) = Ae^{At} & \xrightarrow{t=0} & A = E_1\lambda_1 + E_2\lambda_2 + \cdots + E_n\lambda_n \\ D^{(2)}(e^{At}) = A^2e^{At} & \xrightarrow{t=0} & A^2 = E_1\lambda_1^2 + E_2\lambda_2^2 + \cdots + E_n\lambda_n^2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ D^{(n)}(e^{At}) = A^ne^{At} & \xrightarrow{t=0} & A^n = E_1\lambda_1^n + E_2\lambda_2^n + \cdots + E_n\lambda_n^n \end{array} \right.$$

quindi abbiamo ottenuto il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} I = E_1 + E_2 + \cdots + E_n \\ A = E_1\lambda_1 + E_2\lambda_2 + \cdots + E_n\lambda_n \\ A^2 = E_1\lambda_1^2 + E_2\lambda_2^2 + \cdots + E_n\lambda_n^2 \\ \dots\dots\dots \\ A^n = E_1\lambda_1^n + E_2\lambda_2^n + \cdots + E_n\lambda_n^n \end{array} \right.$$

da cui si possono ricavare  $E_1, E_2, \dots, E_n$  e quindi  $e^{At}$ .

La soluzione del sistema di equazioni differenziali, ha come soluzione:

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_{(om)} + \underline{y}_{(pa)}$$

1. **La soluzione omogenea**  $\underline{y}_{(om)}$  si determina, ponendo:

$$\underline{y}_{(om)} = e^{At} \cdot \underline{c}$$

con

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

costanti arbitrarie da determinare successivamente, per mezzo delle condizioni iniziali.

2. **La soluzione particolare**  $\underline{y}_{(pa)}$  si determina ponendo:

$$\underline{y}_{(pa)} = e^{At} \cdot \underline{\lambda}(t)$$

ed agendo con il metodo delle **Costanti Arbitrarie di Lagrange**<sup>4</sup>:

$$\dot{\underline{\lambda}}(t) = e^{-At} \cdot \underline{b}(t)$$

---

<sup>4</sup>Vedi Pag. 85

**Osservazione 48 (come calcolare  $e^{-At}$ )** *In pratica per calcolare  $e^{-At}$  basta sostituire la variabile  $t$ , con  $-t$ , all'interno dell'espressione che caratterizza  $e^{At}$ :*

$$e^{-At} = e^{A(-t)}$$

per cui nel nostro caso

$$e^{-At} = E_1 e^{-\lambda_1 t} + E_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots + E_n e^{-\lambda_n t} \quad \text{per la (23.1)}$$

$$e^{-At} = E_1 e^{-\lambda_1 t} - E_2 t e^{-\lambda_1 t} + E_3 t^2 e^{-\lambda_1 t} + \dots \quad \text{per la (23.2)}$$

### 23.2.2 Secondo Metodo

Si sfrutta la teoria della **Trasformata di Laplace**, mediante la relazione:

$$\mathcal{L}(e^{At}) = [sI - A]^{-1}$$

Quindi data la matrice  $A$ , per calcolare  $e^{At}$ , si calcola  $[sI - A]^{-1}$ , quindi si effettua l'antitrasformazione<sup>5</sup>, di ogni elemento di tale matrice  $[sI - A]^{-1}$ . La matrice che si ottiene dall'antitrasformazione è  $e^{At}$ .

## 23.3 Esempio di Calcolo

Per comprendere meglio i metodi fin qui descritti, si riporta un esempio concreto.

Si debba risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = & 5x & +y & +2e^{3t} \\ \dot{y} = & -2x & +2y & -e^{3t} \\ x(0) = 2 & y(0) = 1 \end{cases}$$

In forma compatta, si scrive:

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u(t)$$

dove si è posto:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad u(t) = e^{3t}$$

---

<sup>5</sup>con i metodi indicati a pag.—

**23.3.1 Applicazione del Primo Metodo**

Si determinano gli Autovalori della Matrice  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

le cui radici sono:  $\lambda_1 = 3$   $\lambda_2 = 4$ ; quindi si pone:

$$e^{At} = E_1 e^{3t} + E_2 e^{4t}$$

Derivando ambo i membri fino alla derivata prima in  $t = 0$ , si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} I &= E_1 + E_2 \\ A &= 3E_1 + 4E_2 \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

L'integrale generale del sistema omogeneo associato, è:

$$\underline{x}_{om} = e^{At} \underline{c}$$

ATTENZIONE: non calcolare il vettore  $\underline{c}$  a questo punto, utilizzando i valori iniziali. Tale vettore, deve essere calcolato alla fine, cioè dopo aver sommato l'integrale del sistema omogeneo, con un integrale particolare!

Mentre un integrale particolare, scelto in base al metodo delle Costanti Arbitrarie di Lagrange, sarà del tipo:

$$\underline{x}_{pa} = e^{At} \underline{\lambda}(t)$$

Per cui risulta:

$$\dot{\underline{x}}_{pa} = A \cdot e^{At} \underline{\lambda}(t) + e^{At} \dot{\underline{\lambda}}(t) \Rightarrow \dot{\underline{x}}_{pa} = A \cdot \underline{x}_{pa} + e^{At} \cdot \dot{\underline{\lambda}}(t)$$

Considerando il sistema di equazioni differenziali, di partenza

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{b} e^{3t}$$

deve valere l'uguaglianza:

$$e^{At} \cdot \dot{\underline{\lambda}}(t) = \underline{b} \cdot e^{3t} \Rightarrow \dot{\underline{\lambda}}(t) = e^{-At} \cdot \underline{b} \cdot e^{3t}$$

Si ha che

$$e^{-At} = E_1 e^{-3t} + E_2 e^{-4t}$$

quindi

$$\dot{\underline{\lambda}}(t) = (E_1 e^{-3t} + E_2 e^{-4t}) \underline{b} e^{3t} \Rightarrow$$

$$\dot{\underline{\lambda}}(t) = (E_1 + E_2 e^{-t}) \underline{b}$$

quindi:

$$\underline{\lambda}(t) = (E_1 t - E_2 e^{-t}) \underline{b}$$

Riepilogando, l'integrale particolare, è:

$$\underline{x}_{pa}(t) = (E_1 e^{3t} + E_2 e^{4t}) (E_1 t - E_2 e^{-t}) \underline{b} = \dots = (E_1 t - E_2) \underline{b} e^{3t}$$

L'integrale Generale  $\underline{x}(t) = \underline{x}_{om}(t) + \underline{x}_{pa}(t)$ , vale:

$$\underline{x}(t) = (E_1 e^{3t} + E_2 e^{4t}) \underline{c} + (E_1 t - E_2) \underline{b} e^{3t}$$

Si impongono, soltanto a questo punto, le condizioni iniziali:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (E_1 + E_2) \underline{c} - E_2 \underline{b}$$

$$E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Quindi

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + E_2 \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema iniziale, è:

$$\underline{x}(t) = [E_1 \underline{c} + E_1 \underline{b} t - E_2 \underline{b}] e^{3t} + E_2 \underline{c} e^{4t}$$

Calcoliamo i vari coefficienti:

$$E_1 \underline{c} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad E_1 \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad E_2 \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

La soluzione è:

$$\underline{x}(t) = \left[ \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} t \right] e^{3t} + \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Esplicitando le singole variabili, si può anche scrivere:

$$\begin{cases} x(t) &= (-6 - t)e^{3t} + 8e^{4t} \\ y(t) &= (9 + 2t)e^{3t} - 8e^{4t} \end{cases}$$

**23.3.2 Applicazione del Secondo Metodo**

Si calcola

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 - 7s + 12} \begin{pmatrix} s-2 & 1 \\ -2 & s-5 \end{pmatrix}$$

Quindi, si ha che:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2-7s+12}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-7s+12}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2}{s^2-7s+12}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-5}{s^2-7s+12}\right) \end{pmatrix}$$

Si procede al calcolo delle antitrasformate dei singoli elementi:

$$\frac{s-2}{s^2-7s+12} = \frac{A_1}{s-4} + \frac{A_2}{s-3}$$

$$A_1 = \frac{s-2}{(s-4)(s-3)} \cdot (s-4) \Big|_{s=4} = \frac{4-2}{4-3} = 2$$

$$A_2 = \frac{s-2}{(s-4)(s-3)} \cdot (s-3) \Big|_{s=3} = \frac{3-2}{3-4} = -1$$

Quindi

$$\frac{s-2}{s^2-7s+12} = \frac{2}{s-4} - \frac{1}{s-3} \quad \text{da cui:}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2-7s+12}\right) = 2e^{4t} - e^{3t}$$

Con calcoli analoghi, si ottiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-7s+12}\right) = e^{4t} - e^{3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2}{s^2-7s+12}\right) = 2e^{3t} - 2e^{4t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-5}{s^2-7s+12}\right) = 2e^{3t} - e^{4t}$$

In definitiva:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} & e^{4t} - e^{3t} \\ 2e^{3t} - 2e^{4t} & 2e^{3t} - e^{4t} \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema iniziale, è data da:

$$\underline{x}(t) = e^{At} \cdot \underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \underline{b} \cdot u(\tau) d\tau$$

$$e^{At} \cdot \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} & e^{4t} - e^{3t} \\ 2e^{3t} - 2e^{4t} & 2e^{3t} - e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{4t} - 3e^{3t} \\ -5e^{4t} + 6e^{3t} \end{pmatrix}$$

La precedente espressione, prende il nome di **“Risposta Libera” del Sistema**

Mentre:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \underline{b} \cdot u(\tau) d\tau = e^{At} \cdot \underline{b} * u(t)$$

prende il nome di **“Risposta Forzata” del sistema** e quindi:

$$\mathcal{L} \left( \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \underline{b} \cdot u(\tau) d\tau \right) = [sI - A]^{-1} \cdot \underline{b} \cdot U(s)$$

dove  $U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \frac{1}{s-3}$ .

$$[sI - A]^{-1} \cdot \underline{b} \cdot U(s) = \frac{1}{s^2 - 7s + 12} \begin{pmatrix} s-2 & 1 \\ -2 & s-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s-3} =$$

$$= \frac{1}{(s-3)^2(s-4)} \cdot \begin{pmatrix} 2s-5 \\ 1-s \end{pmatrix}$$

$$\frac{2s-5}{(s-3)^2(s-4)} = \frac{A_{12}}{(s-3)^2} + \frac{A_{11}}{s-3} + \frac{A_2}{s-4}$$

$$A_{12} = \left. \frac{2s-5}{s-4} \right|_{s=3} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$A_2 = \left. \frac{2s-5}{(s-3)^2} \right|_{s=4} = 3$$

$$A_{11} + A_2 = 0 \Rightarrow A_{11} = -A_2 = -3$$

Quindi:

$$\frac{2s-5}{(s-3)^2(s-4)} = -\frac{1}{(s-3)^2} - \frac{3}{s-3} + \frac{3}{s-4}$$

Da cui:

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{2s-5}{(s-3)^2(s-4)} \right) = -te^{3t} - 3e^{3t} + 3e^{4t}$$

Con calcoli analoghi si ottiene:

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1-s}{(s-3)^2(s-4)} \right) = -3e^{4t} + 2te^{3t} + 3e^{3t}$$

Allora:

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \underline{b} \cdot u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 3e^{4t} - (t+3)e^{3t} \\ -3e^{4t} + (2t+3)e^{3t} \end{pmatrix}$$

In definitiva, si ha:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \begin{pmatrix} 5e^{4t} - 3e^{3t} \\ -5e^{4t} + 6e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{4t} - (t+3)e^{3t} \\ -3e^{4t} + (2t+3)e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 8e^{4t} - (t+6)e^{3t} \\ -8e^{4t} + (2t+9)e^{3t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Che è la medesima soluzione ottenuta con il Primo Metodo!

## Capitolo 24

# Serie di Fourier

### 24.1 Introduzione

Lo scopo dell'utilizzo della Serie di Fourier, è quello di scomporre delle funzioni periodiche qualsiasi, che godano di particolari caratteristiche, in una sommatoria di funzioni (anch'esse particolari) elementari.

Per “Funzioni Particolari” s'intende funzioni che appartengano all'insieme così definito:

$$L^2(a, b) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (24.1)$$

Tutta la teoria (che qui verrà omessa) relativa alla costruzione della Serie di Fourier, è basata su concetti come: Spazio di Hilbert, Prodotto Scalare, Prodotto Hermitiano ecc.

Concetti che lo studente deve necessariamente conoscere a priori.

Per capire meglio cosa significhi sviluppare in serie di Fourier una funzione, prendiamo, per esempio, un vettore di  $\mathbb{R}^3$ .

Per poterlo rappresentare con le sue componenti, è necessario stabilire una Base di  $\mathbb{R}^3$ .

Una volta fissata la Base, il vettore sarà univocamente determinato, e le sue componenti saranno riferite a tale base.

Analogamente, per poter sviluppare in serie di Fourier una qualsiasi funzione (appartenente ad  $L^2$ ), è necessario fissare una “Base”. A differenza dei vettori, le componenti di tale Base, non saranno costituite da costanti reali, ma da opportune Funzioni; quindi la funzione che si vuole sviluppare, sarà esprimibile mediante una combinazione lineare di tali funzioni che costituiscono la Base fissata.

Questo discorso introduttivo, farebbe letteralmente rabbrivire un matematico. Tuttavia per tutti coloro che abbiano un approccio Ingegneristico (e non puramente Matematico) di tali problematiche, ciò può rendere l'idea dell'utilizzo della Serie di Fourier.



## 24.2 Sviluppo

Consideriamo l'insieme delle funzioni appartenenti ad  $L^2(-\pi, \pi)$ , quindi abbiano periodicità pari a  $2\pi$ .

La Base Ortonormale più utilizzata, per lo sviluppo in Serie di Fourier, è la seguente:

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right]_{0 \leq k \leq m} \quad (k, m \in \mathbb{N}) \quad (24.2)$$

Si potrebbe verificare l'Ortonormalità di tale sistema, effettuando il prodotto scalare di  $L^2(-\pi, \pi)$ , così definito:

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

La “proiezione” di una funzione  $f$  sul sottospazio generato dalla base (24.2), sarà della forma:

$$P_m(x) = \frac{a_0}{2\pi} + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{a_k \cos(kx)}{\pi} + \frac{b_k \sin(kx)}{\pi} \right\}$$

Dove:

$$\begin{cases} a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)dt \\ b_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)dt \end{cases}$$

Il polinomio  $P_m(x)$  è detto: **Polinomio Trigonometrico**.

Un'altra Base Ortogonale (ma non Ortonormale) molto usata è la seguente:

$$[1, \cos(kx), \sin(kx)]_{0 \leq k \leq m} \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

Si ha il Polinomio Trigonometrico:

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{i=1}^m \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

Dove:

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)dt \end{cases}$$

Si ha il seguente:

**Lemma 9 (Riemann-Lebesgue)** Sia  $f(x)$  una funzione di  $L^2(-\pi, \pi)$ ; allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0$$

Il risultato di questo Lemma (la cui dimostrazione segue immediatamente, dalla disuguaglianza di Bessel), è molto importante, in quanto, come si vedrà più avanti, si può affermare che: la scomposizione di un segnale nella “Fondamentale” e nelle sue “Armoniche”, è tale che le ampiezze delle armoniche diminuiscono al crescere della frequenza.

**Definizione 103 (Serie di Fourier)** Se si fa tendere all’infinito il numero  $m$ , si ha:

$$S(f) = \frac{a_0}{2\pi} + \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \frac{a_k \cos(kx)}{\pi} + \frac{b_k \sin(kx)}{\pi} \right\} \quad (24.3)$$

che prende il nome di: **Sviluppo o Serie di Fourier della funzione  $f$**  ed i termini  $a_0, a_k, b_k$  sono detti **Coefficienti di Fourier**.

**Osservazione 49 (IMPORTANTE)** Sia  $f$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ ; si ha che:

- Se  $f$  è una funzione **Dispari**<sup>1</sup> tutti i coefficienti  $a_k$  **sono nulli**; cioè lo sviluppo in serie di Fourier, è composto dai soli  $\sin(kx)$ .
- Se  $f$  è una funzione **Pari** tutti i coefficienti  $b_k$  **sono nulli**; cioè lo sviluppo in serie di Fourier, è composto dai soli  $\cos(kx)$ .

## 24.3 Interpretazione dello Sviluppo di Fourier

Dato lo sviluppo di una funzione  $f$ :

$$S(f) = a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

si pone:  $a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = A_k \cos(kx + \varphi_k)$  e si hanno le seguenti equivalenze:

$$\begin{cases} a_k &= A_k \cos(\varphi_k) \\ b_k &= -A_k \sin(\varphi_k) \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \tan(\varphi_k) &= -\frac{b_k}{a_k} \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Vedi pag.35

Dove  $A_k$  prende il nome di **Ampiezza** del segnale, mentre  $\varphi_k$  quello di **Fase**. Quindi lo sviluppo in serie di Fourier, si può anche scrivere:

$$S(f) = a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k)$$

cioè come somma della **Fondamentale** (per  $k = 1$ ) e delle armoniche, sfasate di un angolo  $\varphi_k$ .

## 24.4 Sistema Ortogonale in $[-c, c]$

Se l'intervallo di periodicità della funzione è del tipo generico  $[-c, c]$ ; si sfrutta il sistema ortogonale:

$$\left[ 1, \cos\left(\frac{k\pi x}{c}\right), \sin\left(\frac{k\pi x}{c}\right) \right]_{k \geq 0}$$

quindi lo sviluppo in Serie di Fourier, sarà:

$$S(f) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{c}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{c}\right) \right]$$

Dove:

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^c f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(t) \cos\left(\frac{k\pi x}{c}\right) dt \\ b_k &= \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{c}\right) dt \end{cases}$$

## 24.5 Teoremi per la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier

**Teorema 121 (Convergenza in media quadratica in  $L^2(-\pi, \pi)$ )** Data una funzione  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  periodica di periodo  $2\pi$  e definito

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m \left( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

si ha che  $P_m$  tende ad  $f$  nella norma di  $L^2(-\pi, \pi)$ , quando  $m$  tende all'infinito, cioè:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |P_m(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m(x) - f(x)\|^2 = 0$$

**Teorema 122 (Convergenza puntuale)** *Sia  $f$  una funzione limitata di periodo  $2\pi$  e avente solo discontinuità “di salto”. Inoltre abbia  $f$ , in ogni punto, la derivata sinistra e destra. Allora la serie di Fourier converge ovunque e la sua somma è uguale a  $f(x)$  nei punti di continuità; e uguale a*

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

*Nei punti di discontinuità le derivate sinistra e destra sono definite come segue*

$$f'_{(-)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h} \quad f'_{(+)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}$$

**Osservazione 50** *Le ipotesi del teorema di sopra possono essere indebolite richiedendo, per esempio, che la funzione  $f$  sia solo Lipschitziana, oppure che valga la cosiddetta **condizione del Dini**:*

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

**Teorema 123 (Convergenza uniforme)** *Se  $f$  è periodica e di classe  $C^1$  allora la serie di Fourier converge uniformemente a  $f$ .*

**Lemma 10** *Se  $f$  è continua essa è definita **univocamente** dalla sua serie di Fourier.*

**Teorema 124** *Se  $f$  è di classe  $C^1$  in un sottointervallo  $[a, b]$ , la serie di Fourier di  $f$  è uniformemente convergente in  $[a, b]$ .*

## 24.6 Esempi di Utilizzo della Serie di Fourier

### 24.6.1 Esempio 1

La seguente analisi è relativa al funzionamento di una Macchina Sincrona (Alternatore).

#### Forma d'onda Trapezia

Fissato un sistema di riferimento ad ascissa curvilinea, lungo la periferia di Traferro, il valore dell'induzione, e quindi della tensione indotta (rappresentata in figura), al traferro ha un andamento seguente al variare dell'angolo al centro (preso come centro del rotore):

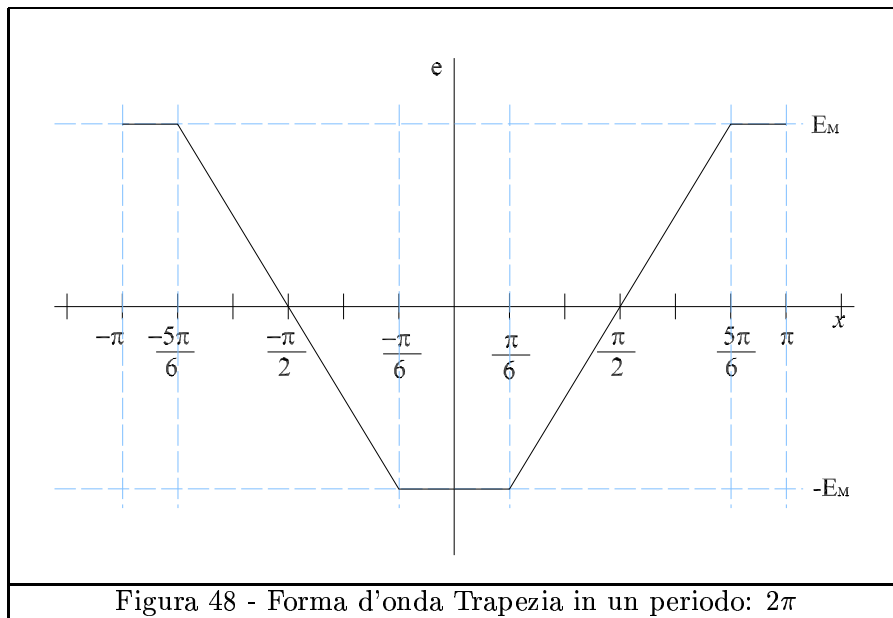


Figura 48 - Forma d'onda Trapezia in un periodo:  $2\pi$

la cui espressione Analitica, nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  considerato, è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} E_M & -\pi \leq x \leq -\frac{5\pi}{6} \\ -\frac{3E_M}{\pi}x - \frac{3E_M}{2} & -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6} \\ -E_M & -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \\ \frac{3E_M}{\pi}x - \frac{3E_M}{2} & \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \\ E_M & \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

**Sviluppo in Serie di Fourier**

Si userà la base ortogonale

$$[1, \cos(kx), \sin(kx)]$$

Il Coefficiente di Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

è banalmente nullo, in quanto  $f(x)$  è una funzione alternativa <sup>2</sup>. Inoltre, così come è stata presa l'origine dei tempi, essa risulta una funzione “Pari” (infatti è simmetrica rispetto all'asse  $y$ ); quindi si può affermare che il suo sviluppo in serie di Fourier non conterrà i termini in  $\sin(kx)$  (cioè tutti i coefficienti  $b_k$  saranno nulli).

Rimangono, quindi da calcolare, i soli coefficienti:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx$$

Essendo  $f(x)$  una funzione pari, ed essendo anche  $\cos(kx)$  pari, si ha che  $f(x) \cdot \cos(kx)$  è ancora una funzione pari, per cui:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx$$

Per la legge dell'additività dell'integrale, si ha:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) \cos(kx) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x) \cos(kx) dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right]$$

Ovvero, per quanto detto precedentemente:

---

<sup>2</sup>e per questo, a valor medio nullo nel periodo

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{6}} -E_M \cos(kx) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( \frac{3E_M}{\pi} x - \frac{3E_M}{2} \right) \cos(kx) dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} E_M \cos(kx) dx \right]$$

Si risolvono separatamente i vari integrali:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} -E_M \cos(kx) dx = -\frac{E_M}{k} \sin\left(k\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{3E_M}{\pi} \cdot x \cdot \cos(kx) dx = \\ &= \frac{3E_M}{k\pi} \left[ \frac{5\pi}{6} \sin\left(k\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} \sin\left(k\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\cos\left(k\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{6}\right)}{k} \right] \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} -\frac{3E_M}{2} \cos(kx) dx = -\frac{3E_M}{2k} \left( \sin\left(k\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(k\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} E_M \cos(kx) dx = -\frac{E_M}{k} \sin\left(k\frac{5\pi}{6}\right)$$

Quindi, con qualche passaggio algebrico e trigonometrico, si ricava:

$$a_k = -\frac{12E_M}{\pi^2 k^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)$$

La Serie di Fourier della funzione  $f(x)$ , risulta quindi:

$$S(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos(kx) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ -\frac{12E_M}{\pi^2 k^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right) \right] \cos(kx)$$

Considerando costante la velocità angolare  $\omega$  di rotazione del rotore, si ha:

$$x = \omega t$$

Per cui l'espressione temporale della Serie di Fourier, sarà:

$$S(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ -\frac{12E_M}{\pi^2 k^2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right) \right] \cos(k\omega t)$$

**OSSERVAZIONE**

SI PUO' FACILMENTE NOTARE CHE, NON ESISTONO ARMONICHE DI ORDINE PARI, E CHE PER  $k = 3$  "TERZA ARMONICA" (ed in generale per tutti i multipli di 3) SI HA CHE  $a_k = 0$ ; CIOE' LA TERZA ARMONICA E LE ARMONICHE MULTIPLE DI 3 NON SONO PRESENTI NEL SEGNALE A FORMA D'ONDA TRAPEZIA.

**24.6.2 Esempio 2**

Si voglia calcolare il valore a cui converge la serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ , che come è risaputo è una serie convergente.

Si calcola lo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $f(x) = x^2$  estesa per periodicità; e si valuta in  $[-\pi, \pi]$ . Tutti i coefficienti relativi al seno, sono nulli perchè  $f$  è una funzione Pari.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ \frac{x^2 \sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx \right\}$$

$$a_k = -\frac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx$$

quindi:

$$a_k = \frac{4}{k^2} (-1)^k$$

In definitiva, si ha:

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(kx)$$

Per i teoremi visti prima, si ha convergenza  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ; quindi per  $x = \pi$ :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos(k\pi) \Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^k (-1)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



**Parte IV**

**APPENDICI**

# APPENDICI

## Appendice A

# Assiomi Fondamentali dell'Analisi

L'insieme dei numeri Reali ( $\mathbb{R}$ ), è un insieme caratterizzato dalle seguenti proprietà assiomatiche. Dati tre numeri reali  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ; si ha:

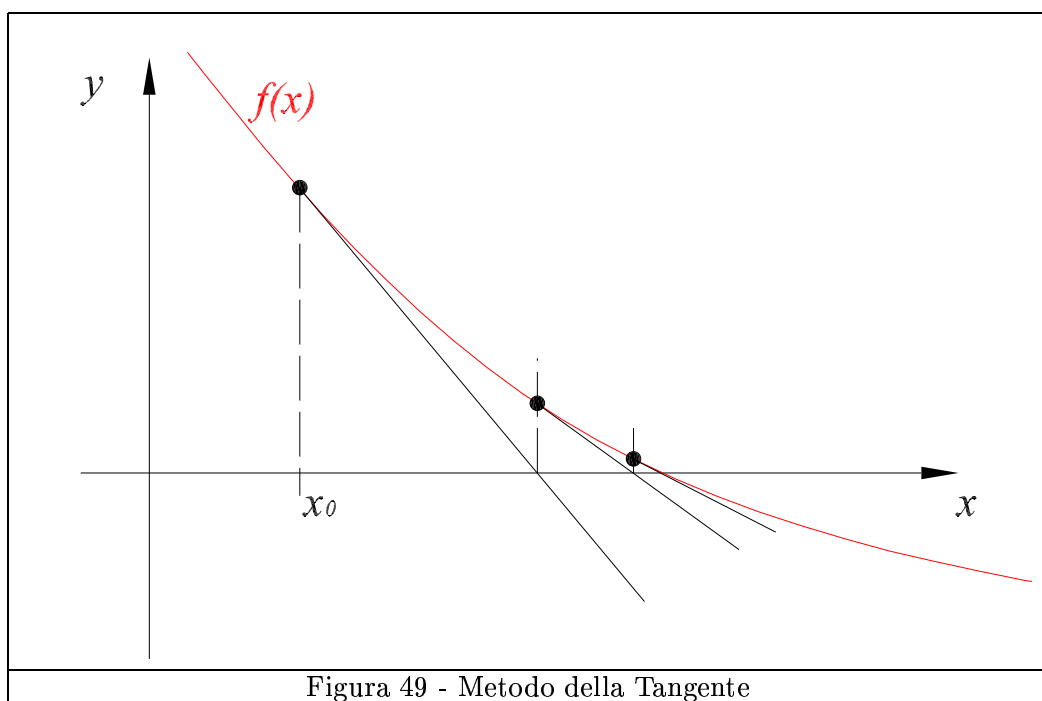
1.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (Proprietà associativa della somma)
2.  $x + y = y + x$  (Proprietà Commutativa della somma)
3.  $\exists x_0 \in \mathbb{R} : x + x_0 = x$  (Elemento neutro della somma)
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = x_0$  (Opposto di  $x$ )
5.  $(xy)z = x(yz)$  (Proprietà associativa del prodotto)
6.  $xy = yx$  (Proprietà commutativa del prodotto)
7.  $\exists x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_0 : xx_1 = x$  (Elemento neutro del prodotto)
8.  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0, \exists x'' \in \mathbb{R}; xx'' = x_1$  (Inverso di  $x$ )
9.  $(x + y)z = xz + yz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$  (Proprietà Distributiva)
10.  $x \leq x$  (Proprietà Riflessiva)
11.  $x \leq y$  e  $y \leq x \rightarrow x = y$  (Proprietà Antisimmetrica)
12.  $x \leq y$  e  $y \leq z \rightarrow x \leq z$  (Proprietà Transitiva)
13.  $x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$
14.  $x \leq y$  e  $z \geq 0 \rightarrow xz \leq yz$
15. **Assioma di Completezza.** Se **A** e **B** sono due sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{R}$  tali che  $a \leq b$  per ogni  $a \in \mathbf{A}$  e per ogni  $b \in \mathbf{B}$ , allora esiste  $\xi \in \mathbb{R}$  tale che  $a \leq \xi \leq b$  per ogni  $a \in \mathbf{A}$  e per ogni  $b \in \mathbf{B}$ .

## Appendice B

# Zeri di una funzione

Quello che segue, è un metodo per calcolare, in maniera approssimata, gli zeri di una qualsiasi funzione derivabile in un intorno del proprio zero.

### Metodo della Tangente (o di Newton)



Consideriamo la tangente alla curva nel punto  $(x_0, f(x_0))$ , che è data da:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Questa tangente incontra l'asse  $x$ , e il valore, che assume, è dato da:

$$x_1 = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Tale ascissa individua il valore dello zero approssimato della funzione. Se tale valore non approssima abbastanza quello da noi cercato, basta ripetere ricorsivamente l'applicazione della tangente nel generico punto.

La successione di tali iterazioni ci consente di determinare l'equazione generalizzata per il metodo della tangente, che è dato da:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Per  $n = 0$ , si ha  $x_0$ , che è il punto di “prima approssimazione” dello zero, fissato in maniera che sia “abbastanza vicino” allo zero effettivo.

## B.1 Criteri di Convergenza

**Teorema 125 (Convergenza Locale)** Sia  $f(x) \in C^3([a, b])$  con  $a < \alpha < b$ ,  $f(\alpha) = 0$ ,  $f'(\alpha) \neq 0$ ; allora:

- 1) esiste un numero  $\rho > 0$  t.c.  $\forall x_0 \in [\alpha - \rho; \alpha + \rho]$  il metodo di Newton converge
- 2) la convergenza è di ordine  $p \geq 2$ .

**Teorema 126 (Convergenza Globale)** Sia  $f(x) \in C^2([a, b])$ , con  $f(a) \cdot f(b) < 0$  e supponiamo:

- 1)  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- 2)  $f''(x) \geq 0$  oppure  $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
- 3)  $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a \quad ; \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a$

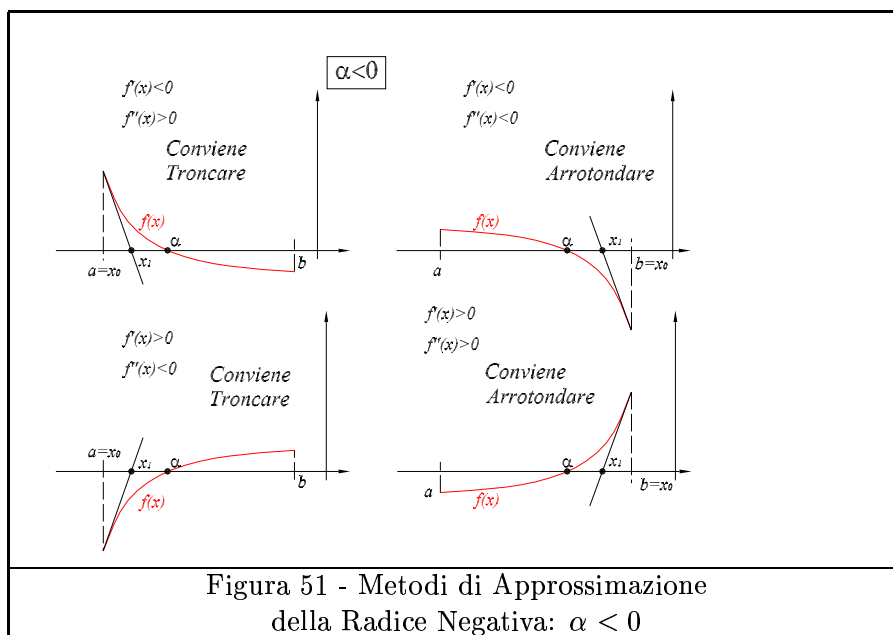
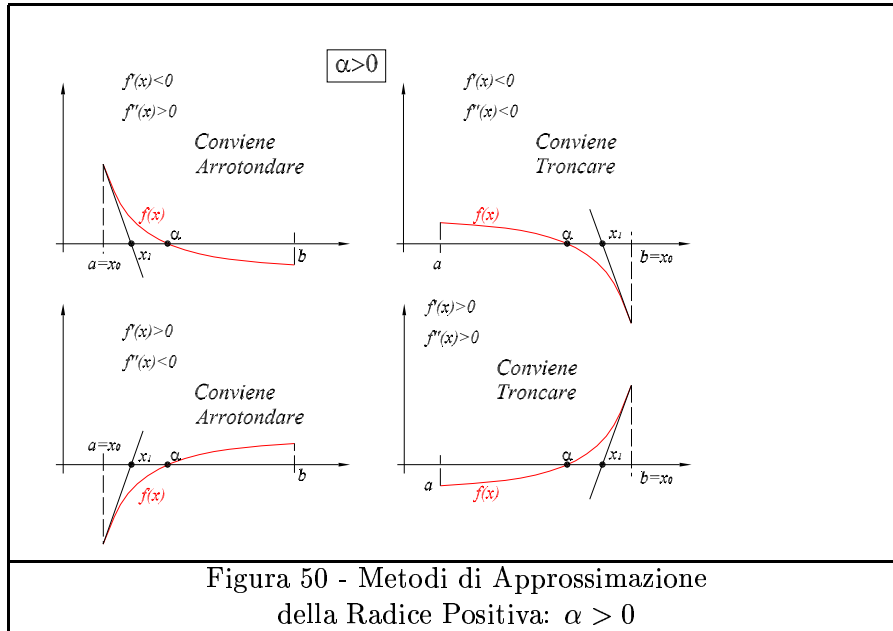
allora  $f(x)$  ha un solo zero  $\alpha \in [a, b]$  ed il metodo di Newton converge ad  $\alpha$  per ogni  $x_0 \in [a, b]$

La condizione 3) equivale a supporre che le tangenti nei punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  intersechino l'asse delle ascisse all'interno di  $[a, b]$ . Se fossero entrambe verificate, si potrebbe prendere, indifferentemente,  $x_0 = a$  oppure  $x_0 = b$ .

Se fosse verificata la condizione  $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a$  allora si può porre  $x_0 = a$ .

Se fosse verificata la condizione  $\left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a$  allora si può porre  $x_0 = b$ .

Di seguito sono riportate alcune metodologie di approssimazione, utili ad incrementare la velocità di convergenza del metodo di Newton <sup>1</sup>:



<sup>1</sup> Si ricordi che, per esempio,  $rd(1.239) = 1.24$ ,  $rd(-1.239) = -1.24$ ,  $tr(1.239) = 1.23$ ,  $tr(-1.239) = -1.23$ . Dove  $rd$  sta per 'Arrotondamento', e  $tr$  sta per 'Troncamento'.

## Appendice C

# Metodo di Routh-Hurwitz

Questo metodo, ampiamente utilizzato per lo studio della stabilità dei sistemi, è molto utile per valutare il segno degli zeri di un polinomio di grado  $n$ ; in particolare consente di valutare la positività o negatività della parte reale degli zeri di un qualsiasi polinomio monico:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Questo metodo è composto da una condizione **necessaria** ed una **sufficiente**:

- **Condizione Necessaria - Routh.** Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché tutte le radici del polinomio dato abbiano **Parte Reale strettamente negativa**, è che esistano **tutti i coefficienti** dei monomi di grado diverso, e che abbiano tutti lo stesso segno.

Per i polinomi di secondo grado, tale condizione è anche sufficiente.

**Esempio:** sia dato il seguente polinomio:

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1$$

La condizione necessaria (o di Routh) non è verificata a causa della presenza del coefficiente di  $\lambda^2$  che è negativo.

Sia dato il seguente polinomio:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5$$

La condizione necessaria (o di Routh) non è verificata a causa della mancanza del termine  $a_1 \cdot \lambda$ .

- **Condizione Sufficiente - Hurwitz.** Per esporre la condizione di Hurwitz, è necessario costruire la seguente tabella, denominata **Tabella di Hurwitz**; dato il polinomio monico:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

si costruisce la Tabella di Hurwitz:

	1	2	3	4	...	$\infty$
$n$	1	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...	$a_0$	
$n-1$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...	$a_1$	
$n-2$						
$n-3$						
...						
1						
0						

I restanti elementi della tabella si determinano mediante la seguente regola:

$$c_{i,k} = \frac{-\det \begin{pmatrix} c_{i+2,1} & c_{i+2,k+1} \\ c_{i+1,1} & c_{i+1,k+1} \end{pmatrix}}{c_{i+1,1}}$$

Riportiamo, per facilitare la comprensione, un esempio: sia dato il seguente polinomio:

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

La tabella di Hurwitz è la seguente:

	1	2	3	4	...
5	1	3	2	0	0
4	2	1	1	0	...
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	...
2	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	...
1	14	0	0	0	...
0	1	0	0	0	...



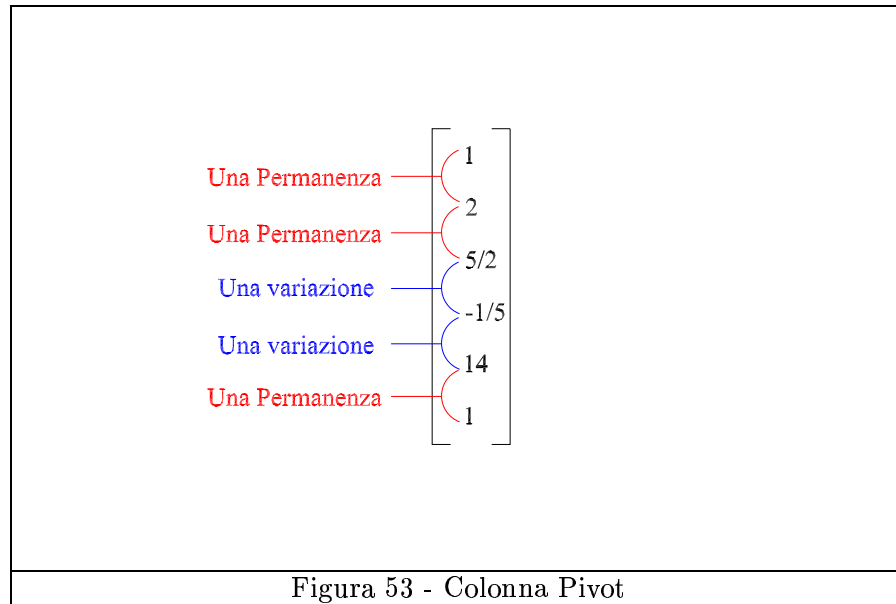
	1	2	3	4	...	
5	1	3	2	0	0	$-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
4	2	1	1	0	...	$2$
3	5/2	3/2	0	0	...	$-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
2	-1/5	1	0	0	...	$2$
1	14	0	0	0	...	$-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{vmatrix}$
0	1	0	0	0	...	$5/2$

Figura 52 - Tabella di Hurwitz

Costruita la Tabella di Hurwitz (vedi Figura precedente), si considera la **prima** colonna (denominata Colonna Pivot, ovvero colonna Perno); nel nostro esempio è:

$$\text{Colonna Pivot} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{5} \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il criterio di Hurwitz afferma che: “il numero di radici a parte reale strettamente negativa è pari al numero di **permanenze di segno** della colonna Pivot; mentre il numero di radici a parte reale strettamente positiva è pari al numero di **variazioni di segno** della colonna medesima”.



Nel nostro esempio si hanno 2 variazioni di segno, e precisamente nel passaggio tra  $+\frac{5}{2}$  e  $-\frac{1}{5}$  (una variazione di segno), e nel passaggio da  $-\frac{1}{5}$  e  $+14$  (un'altra variazione di segno).

Si può affermare che il polinomio  $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$  ha 2 radici a parte reale strettamente positiva, e 3 a parte reale strettamente negativa.

Se nella colonna Pivot compare uno 0 (zero), ma la riga corrispondente non è tutta nulla, si sostituisce lo zero con un numero  $\varepsilon$  (positivo o negativo) tale che  $|\varepsilon| \rightarrow 0$  e si prosegue nel calcolo dei restanti elementi della tabella (che in questo caso dipenderanno da  $\varepsilon$ ); alla fine si valuterà la permanenza o la variazione di segno nella colonna Pivot, considerando il segno assegnato ad  $\varepsilon$ .

Esempio: sia dato il polinomio  $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$ ; la tabella di Hurwitz corrispondente è:

	1	2	3	4
5	1	1	2	0
4	1	1	1	0
3	0	1	0	0
2				
1				
0				

Si sostituisce lo 0 della terza riga della colonna Pivot con un numero  $\varepsilon > 0 : \varepsilon \rightarrow 0$ ; si ha:

	1	2	3	4
5	1	1	2	0
4	1	1	1	0
3	$\varepsilon$	1	0	0
2	$-\frac{1}{\varepsilon}$	1	0	0
1	1	0	0	0
0	1	0	0	0

Anche in questo caso si hanno 3 permanenze e 2 variazioni di segno.

## Appendice D

# Radici Reali dei Polinomi

In questo capitolo verranno illustrate alcune tecniche di Ricerca ed identificazione delle radici Reali dei polinomi a coefficienti Reali.

Si ricordi che, dato un polinomio  $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$  a coefficienti interi, le eventuali Radici razionali del polinomio stesso sono da ricercarsi nell'insieme:  $\left\{ \frac{\pm \text{divisori di } a_0}{\pm \text{divisori di } a_m} \right\}$

### D.1 Ricerca dell'intervallo di esistenza delle Radici Reali con metodo di Ruffini

Per primo verrà illustrato lo schema (di Ruffini) per effettuare rapidamente la divisione di un qualsiasi polinomio  $P(x)$  per un monomio  $x - \alpha$ .

Si prenda il polinomio:  $P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1$  ed il monomio  $x - 2$ ; si voglia effettuare la divisione  $\frac{P(x)}{x-2}$ . Si costruisce la seguente tabella:

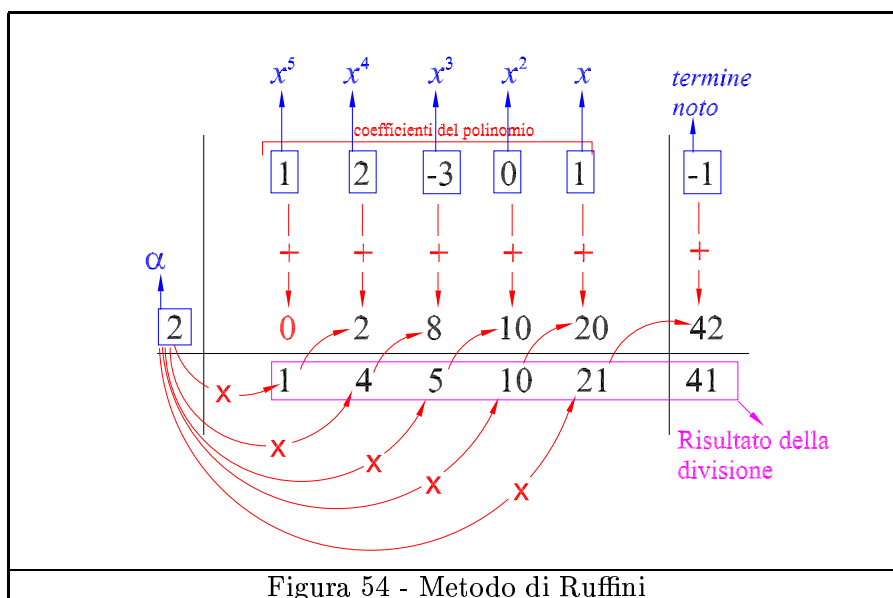


Figura 54 - Metodo di Ruffini

Il risultato della divisione, va interpretato nel seguente modo:

	1	2	-3	0	1	-1
2	0	2	8	10	20	42
	1	4	5	10	21	41

Figura 55 - Interpretazione del Risultato

Ovvero il quoziente della divisione, è il seguente polinomio (di grado 4):

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 21$$

si ha:

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1 = (x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 21) \cdot (x - 2) + 41$$

Dal precedente esempio si può fare la seguente osservazione: essendo

$$x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1 = (x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 21) \cdot (x - 2) + 41$$

è evidente che **se esiste la radice reale** essa deve necessariamente essere  $\leq \alpha = 2$  poichè la quantità  $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 21$  (essendo i coefficienti delle  $x$  tutti positivi) per  $x \geq 2$  è sicuramente positiva. E' anche positivo il termine noto 41, quindi affinché sia  $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1 = (x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 21) \cdot (x - 2) + 41 = 0$  deve essere  $x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$ .

In definitiva, se **tutti i coefficienti derivanti dalla regola di Ruffini (non si considerano eventuali valori nulli), compreso il resto, sono Positivi o Negativi**, allora la radice Reale del polinomio (se esiste<sup>1</sup>) è sicuramente  $< \alpha$ .

Con ragionamenti analoghi si può fissare un estremo inferiore di ricerca delle eventuali radici Reali: al posto di  $P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1$  si prenda il polinomio  $P(-x) = -x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x - 1$  e si applichi ancora una volta il metodo di Ruffini con  $\alpha = 2$ ; si ottiene

	-1	2	3	0	-1	-1
2	<b>0</b>	-2	0	6	12	22
	-1	0	3	6	11	21

Figura 56 - Estremo inferiore, tentativo con  $\alpha = 2$

Si noti che non tutti i coefficienti sono dello stesso segno (sono tutti positivi tranne il  $-1$  iniziale), quindi non si può affermare nulla. Proviamo con  $\alpha = 3$ :

	-1	2	3	0	-1	-1
3	<b>0</b>	-3	-3	0	0	-3
	-1	-1	0	0	-1	-4

Figura 57 - Estremo inferiore, tentativo con  $\alpha = 3$

Questa volta tutti i coefficienti sono dello stesso segno (negativi), quindi si può affermare che la radice reale (se esiste) del polinomio  $P(-x) = -x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x - 1$  è sicuramente  $< \alpha = 3$ .

Per il polinomio effettivo  $P(x)$ , si può affermare che la radice Reale (se

<sup>1</sup>Si tenga presente che questo metodo non dà garanzia sull'esistenza di radici reali; il polinomio potrebbe anche non avere radici Reali!

esiste) deve essere  $> -3$ .

In definitiva si ha che, per il polinomio dato  $P(x)$ , le sue eventuali radici reali sono comprese nell'intervallo  $[-3; 2]$ . Si verifica il risultato riportando il grafico dell'andamento di

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1$$

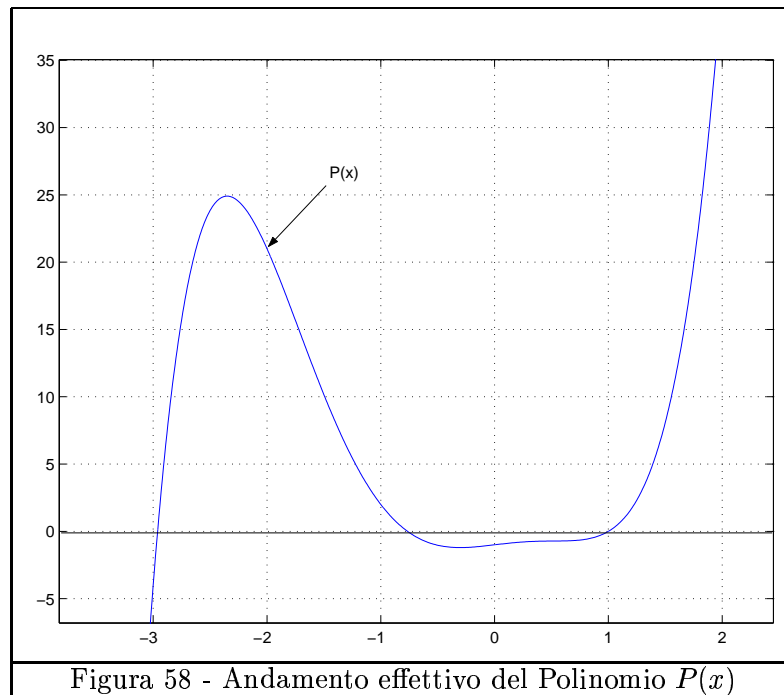


Figura 58 - Andamento effettivo del Polinomio  $P(x)$

Si osservi che (in questo particolare caso) le radici Reali siano 3 e **TUTTE** comprese nell'intervallo  $[-3; 2]$ .

### Regola

- Si opera la regola di Ruffini applicata al Polinomio dato, con un certo  $\alpha_1 > 0$ ; se tutti i coefficienti del polinomio quoziente e del resto, hanno lo stesso segno, allora l'eventuale radice reale del polinomio dato è sicuramente minore di  $\alpha_1$ .
- Si opera la regola di Ruffini applicata al Polinomio  $P(-x)$ , con un certo  $\alpha_2 > 0$ ; se tutti i coefficienti del polinomio quoziente e del resto, hanno lo stesso segno, allora l'eventuale radice reale del polinomio dato è sicuramente maggiore di  $-\alpha_2$ .

## D.2 Ricerca delle Radici Reali con metodo della Successione di Sturm

Il metodo che ci accingiamo ad enunciare, permette la localizzazione e la quantificazione delle radici Reali di un polinomio a coefficienti reali. A differenza del metodo precedente, questo permette di verificare l'esistenza e determinare il numero delle Radici Reali del polinomio dato:

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$

Definiamo la Successione di Sturm

**Definizione 104** Si dice *Successione di Sturm* per il polinomio  $P(x)$  con  $a_i \in \mathbb{R}$ , una **successione di polinomi Reali**:

$$P_0(x) = P(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \dots, P_k(x) \quad (k \leq m)$$

per cui valgano le seguenti proprietà:

- a)  $P_k(x)$  non ha zeri Reali
- b)  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $P_r(\alpha) = 0$  per  $1 \leq r \leq k-1$  implica  $P_{r-1}(\alpha)P_{r+1}(\alpha) < 0$ .
- c)  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $P_0(\alpha) = 0$  implica  $P'_0(\alpha)P_1(\alpha) > 0$ .

Presa quindi una qualsiasi successione di Sturm

$$P_0(x) = P(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \dots, P_k(x) \quad (k \leq m) \quad (D.1)$$

vale il seguente teorema:

**Teorema 127 (di Sturm)** Data una successione di Sturm (D.1), il numero delle radici Reali del polinomio  $P(x)$ , nell'intervallo  $a < x \leq b$  è dato da

$$V(a) - V(b)$$

dove  $V(a)$  ( $V(b)$ ) è il numero delle variazioni di segno presenti nella successione dei valori non nulli assunti dalla (D.1) nel punto  $a$  ( $b$ ).

**Corollario 13** Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio  $P(x)$  abbia esattamente  $m$  radici Reali e Distinte è che sia  $k = m$  (la successione di Sturm si dice Completa) e che tutti i polinomi abbiano i coefficienti dei termini di grado massimo dello stesso segno.

A questo punto resta da individuare una successione di Sturm, partendo dal polinomio  $P(x)$ . Si costruisce la seguente successione <sup>2</sup>:

$$P_0(x) = P(x) \quad P_1(x) = \frac{dP(x)}{dx} = P'(x)$$

---

<sup>2</sup>Si lascia al lettore la dimostrazione che essa sia una successione di Sturm, ovvero che verifichi le condizioni imposte dalla definizione.



a questo punto si effettua la divisione polinomiale di  $\frac{P_0(x)}{P_1(x)}$  ottenendo un quoziente  $Q_1(x)$  (di grado  $m-1$ ) ed un Resto  $R_1(x)$  (di grado  $m-2$ ); si pone:

$$P_2(x) = -R_1(x) \quad (\text{ATTENZIONE al segno meno})$$

Si procede, effettuando la divisione  $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$  ottenendo un Quoziente  $Q_2(x)$  ed un resto  $R_2(x)$ . Si pone

$$P_3(x) = -R_2(x)$$

e così via fino ad ottenere la successione voluta. L'algoritmo di calcolo dei componenti della successione, ha termine in quanto per ogni divisione effettuata il grado del polinomio diminuisce. Si riconosce, nel precedente algoritmo, il noto metodo di Euclide per il calcolo del Massimo Comun Divisore tra  $P_0(x)$  e  $P'(x)$ .

Per chiarezza, si riporta un esempio concreto. Sia

$$P_0(x) = P(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1$$

$$P_1(x) = P'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 1$$

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)} \rightarrow Q_1(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{25} \quad R_1(x) = -\frac{46}{25}x^3 + \frac{18}{25}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{27}{25}$$

per non portarsi dietro troppe frazioni, si moltiplica  $R_1(x)$  per 25, e si pone:

$$R_1(x) = -46x^3 + 18x^2 + 20x - 27 \quad (\text{il risultato finale non cambia})$$

$$P_2(x) = -R_1(x) = 46x^3 - 18x^2 - 20x + 27$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \rightarrow Q_2(x) = \frac{5}{46}x + \frac{229}{1058} \quad R_2(x) = -\frac{1550}{529}x^2 + \frac{1475}{1058}x - \frac{5125}{1058}$$

operiamo la moltiplicazione

$$\frac{1058}{25} \cdot R_2(x)$$

e analogamente, poniamo

$$R_2(x) = -124x^2 + 59x - 205$$

$$P_3(x) = -R_2(x) = 124x^2 - 59x + 205$$

$$\frac{P_2(x)}{P_3(x)} \rightarrow Q_3(x) = \frac{23}{62}x + \frac{241}{7688} \quad R_3(x) = -\frac{724201}{7688}x + \frac{158171}{7688}$$

si moltiplica  $R_3(x)$  per  $\frac{7688}{23}$ :

$$R_3(x) = -31487x + 6877$$

$$P_4(x) = 31487x - 6877$$

$$\frac{P_3(x)}{P_4(x)} \rightarrow Q_4(x) = \frac{124}{31487}x - \frac{43695}{43105703} \quad R_4(x) = \frac{371158200}{1874161}$$

$$P_5(x) = -371138200$$

La successione cercata è:

$$P_0(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x - 1$$

$$P_1(x) = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 1$$

$$P_2(x) = 46x^3 - 18x^2 - 20x + 27$$

$$P_3(x) = 124x^2 - 59x + 205$$

$$P_4(x) = 31487x - 6877$$

$$P_5(x) = -371138200$$

Vogliamo sapere quante sono le radici reali del polinomio, nell'intervallo  $[-3, 2]$ ; si costruisce la tabella dei segni:

$P_i(x)$	-3	2
$P_0(x)$	-	+
$P_1(x)$	+	+
$P_2(x)$	-	+
$P_3(x)$	+	+
$P_4(x)$	-	+
$P_5(x)$	-	-
$V(x)$	4	1

$$V(-3) - V(2) = 4 - 1 = 3$$

Quindi nell'intervallo  $[-3; 2]$  vi sono 3 soluzioni reali (C.V.D.).

Supponiamo (sfruttando la successione già calcolata) di voler sapere quante radici reali abbia il polinomio  $P(x)$  in tutto il suo dominio  $D = ]-\infty; +\infty[$ . La tabella dei segni si costruisce molto rapidamente effettuando il calcolo dei limiti dei vari polinomi della successione. La tabella (in questo caso) resta invariata; si conclude che il polinomio dato ha soltanto 3 radici reali in tutto il suo dominio.

(Continua  $\longrightarrow$ )

Supponiamo, infine, di voler sapere quante siano le radici reali positive; si costruisce la tabella dei segni:

$P_i(x)$	0	$+\infty$
$P_0(x)$	—	+
$P_1(x)$	+	+
$P_2(x)$	+	+
$P_3(x)$	+	+
$P_4(x)$	—	+
$P_5(x)$	—	—
$V(x)$	2	1

$$V(0) - V(+\infty) = 2 - 1 = 1$$

Quindi il Polinomio ha soltanto una radice Reale Positiva (si conclude che le altre due sono negative) <sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Risultato che già si conosceva, dal grafico del suo andamento

## Appendice E

# Superfici Tridimensionali

Di seguito vengono riportate, le caratteristiche fondamentali delle superfici tridimensionali più note ed utilizzate:

### PIANO

Dati due vettori non paralleli  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  ed un punto  $P$  di  $\mathbb{R}^3$ ; il piano parallelo ai vettori dati, e passante per  $P$ , ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x - p_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x - p_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x - p_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

Dove si è posto:  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $P = (p_1, p_2, p_3)$ , e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . L'equazione Cartesiana del piano è:  $ax + by + cz + d = 0$  (con  $a, b, c$  non tutti nulli); e sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a = J_1 \\ b = J_2 \\ c = J_3 \\ d = -J_1 p_1 - J_2 p_2 - J_3 p_3 \end{cases}$$

$$\left( J_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; J_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; J_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Dall'equazione cartesiana  $ax + by + cz + d = 0$ , si ha:

- i) Se  $a \neq 0 \rightarrow \vec{a} = \left( -\frac{b}{a}, 1, 0 \right); \vec{b} = \left( -\frac{c}{a}, 0, 1 \right); P = \left( -\frac{d}{a}, 0, 0 \right)$
- ii) Se  $b \neq 0 \rightarrow \vec{a} = \left( 1, -\frac{a}{b}, 0 \right); \vec{b} = \left( 0, -\frac{c}{b}, 1 \right); P = \left( 0, -\frac{d}{b}, 0 \right)$
- iii) Se  $c \neq 0 \rightarrow \vec{a} = \left( 1, 0, -\frac{a}{c} \right); \vec{b} = \left( 0, 1, -\frac{b}{c} \right); P = \left( 0, 0, -\frac{d}{c} \right)$

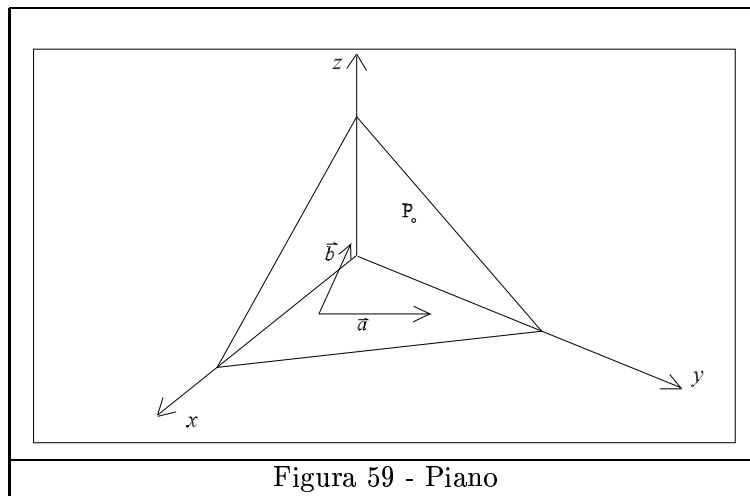


Figura 59 - Piano

### SFERA

Un'equazione del tipo  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ , con  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$ ; rappresenta, nello spazio, una sfera con centro nel punto  $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$  e raggio  $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$

### ELLISSOIDE di ROTAZIONE

La superficie rotonda, la cui proiezione sul piano  $yz$ , è l'ellisse di equazione  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  ed il cui asse di rotazione, coincide con l'asse  $z$ ;  
ha equazione  $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  e viene denominato 'Ellissoide di rotazione'.

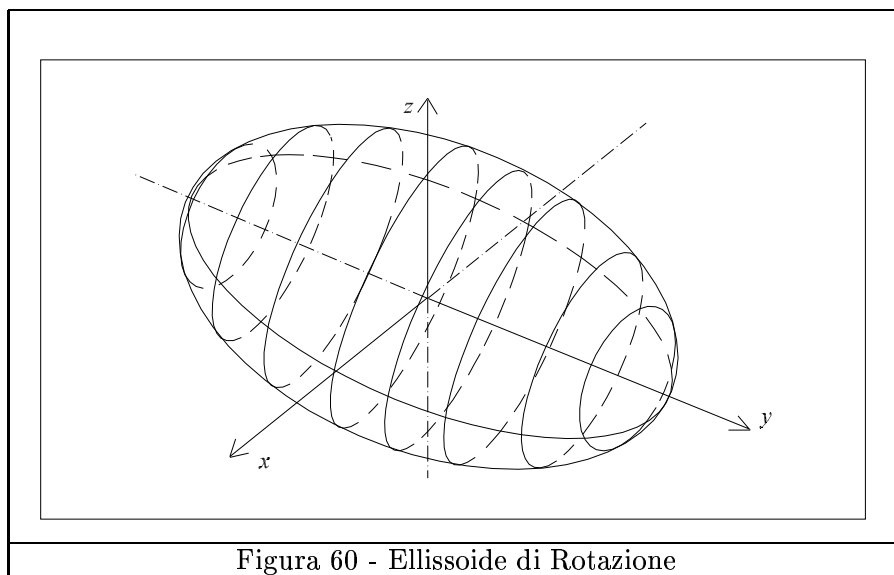


Figura 60 - Ellissoide di Rotazione

**IPERBOLOIDE di ROTAZIONE ad UNA FALDA**

La superficie rotonda, la cui traccia sul piano  $yz$ , è l'iperbole di equazione

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ed il cui asse di rotazione, coincide con l'asse  $z$ ; ha equazione:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

e viene denominato 'Iperboloide di Rotazione ad una falda'.

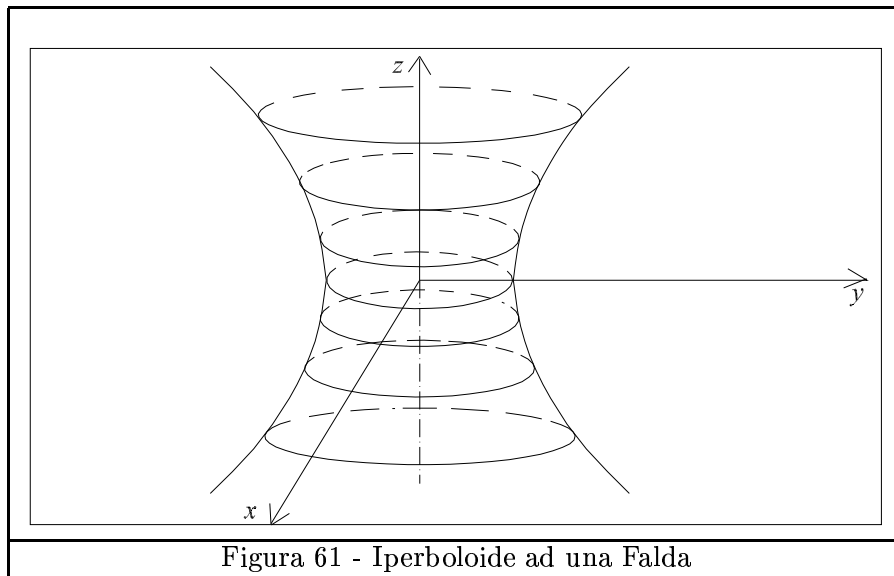


Figura 61 - Iperboloide ad una Falda

**IPERBOLOIDE di ROTAZIONE a DUE FALDE**

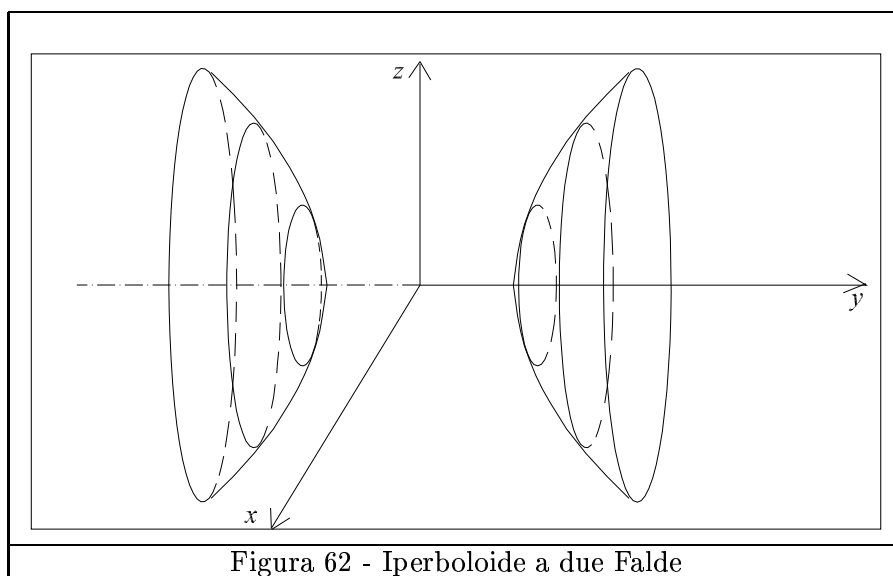
La superficie rotonda, la cui traccia sul piano  $yz$ , è l'iperbole di equazione

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ed il cui asse di rotazione, coincide con l'asse  $y$ ; ha equazione:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2 + z^2}{b^2} = 1$$

e viene denominato 'Iperboloide di Rotazione a due falde'.



### PARABOLOIDE di ROTAZIONE

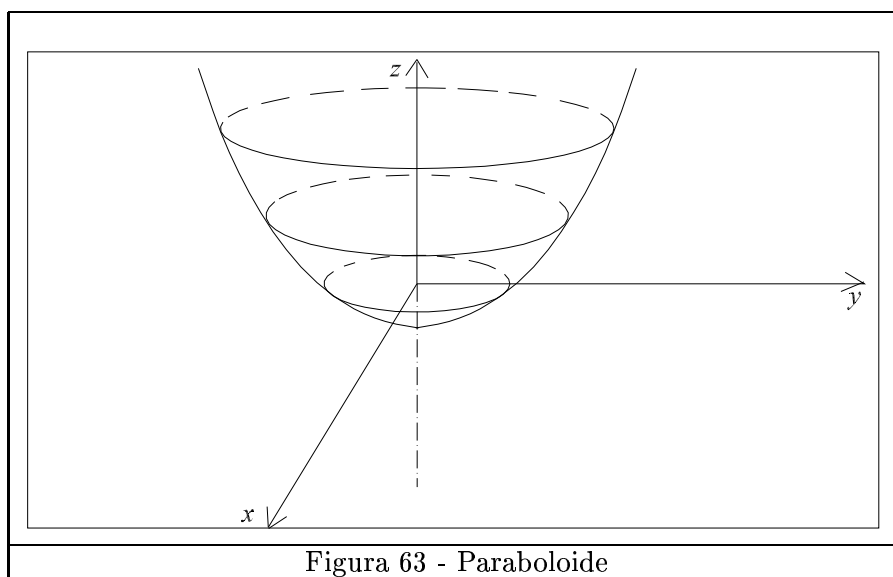
La superficie rotonda, la cui traccia sul piano  $yz$ , è la parabola di equazione

$$y^2 = 2pz \quad (\text{con}) \quad p \neq 0$$

ed il cui asse di rotazione, coincide con l'asse  $z$ ; ha equazione:

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

e viene denominato 'Paraboloide di Rotazione'.



**CILINDRO**

La superficie cilindrica rotonda, la cui traccia sul piano  $yz$ , è la coppia di rette  $z = \pm 1$  ( $|z| = 1$ ), ed il cui asse di rotazione coincide con l'asse  $y$ ; ha equazione cartesiana

$$x^2 + z^2 = 1$$

**CONO**

La superficie conica rotonda, la cui traccia sul piano  $yz$ , è la coppia di rette  $y = z$ ,  $y = -z$  ( $y = |z|$  oppure  $y^2 = z^2$ ), ed il cui asse di rotazione coincide con l'asse  $z$ ; ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

**Osservazione**

Per tutte le superfici viste, è sufficiente cambiare il nome delle variabili ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ), mantenendo la medesima equazione cartesiana, per cambiare l'asse di rotazione della superficie tridimensionale.



## Appendice F

# Relazioni Vettoriali

Di seguito vengono riportate alcune relazioni fra grandezze vettoriali, di uso frequente; con la premessa:  $f \in C^2$ ,  $\underline{F}, \underline{G} \in C^1$ ; ( $\cdot$ =prodotto scalare) e ( $\times$ =prod. vettoriale)

A) (**Definizione di Divergenza**)  $\operatorname{div} \underline{F} = \nabla \cdot \underline{F}$

B) (**Definizione di Rotore**)  $\operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \times \underline{F}$

i)  $(\underline{F} \times \underline{G}) \cdot \underline{E} = \underline{F} \cdot (\underline{G} \times \underline{E})$

ii)  $\underline{F} \times (\underline{G} \times \underline{E}) = (\underline{F} \cdot \underline{E})\underline{G} - (\underline{F} \cdot \underline{G})\underline{E}$

iii) (Laplaciano di  $f$ )  
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(\underline{x})) = \nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f =$   
 $= \Delta f = \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f + \partial_{zz}^2 f$

iv)  $\operatorname{div}(f(\underline{x})\underline{F}(\underline{x})) = (\nabla f) \cdot \underline{F} + f \operatorname{div} \underline{F}$

v)  $\operatorname{rot}(f(\underline{x})\underline{F}(\underline{x})) = (\nabla f) \times \underline{F} + f \operatorname{rot} \underline{F}$

vi)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla)f = 0$

vii)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \underline{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{F}) = 0$

viii)  $\operatorname{div}(\underline{F} \times \underline{G}) = (\operatorname{rot} \underline{F}) \cdot \underline{G} - \underline{F} \cdot (\operatorname{rot} \underline{G})$

ix)  $\operatorname{rot}(\underline{F} \times \underline{G}) = \nabla \times (\underline{F} \times \underline{G}) = \underline{F}(\operatorname{div} \underline{G}) - \underline{G}(\operatorname{div} \underline{F}) - (\underline{F} \cdot \nabla)\underline{G} + (\underline{G} \cdot \nabla)\underline{F}$

## Appendice G

# La disuguaglianza di Bernoulli

La trattazione seguente, avrà lo scopo di determinare gli intervalli di validità della nota Disuguaglianza di Bernoulli al variare di  $\delta$  e  $x$  nei reali:  $\delta, x \in \mathbb{R}$ .

$$(1 + \delta)^x \geq 1 + \delta x \quad \text{Disuguaglianza di Bernoulli} \quad (\text{G.1})$$

Si costruiscono due funzioni:  $g(x) = (1 + \delta)^x$   $h(x) = 1 + \delta x$ .

Per dimostrare la disuguaglianza, è sufficiente dimostrare che:  $g(x) - h(x) \geq 0$  per opportuni valori di  $\delta, x$ .

Sia  $f(x) = g(x) - h(x)$ , si effettua lo studio della positività di  $f(x)$ .

1. Il caso  $\delta = 0$ , non è interessante, in quanto le funzioni si riducono a:  $g(x) = 1$   $h(x) = 1$ , e quindi, in questo caso la disuguaglianza è vera  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
2. Per  $-1 \leq \delta \leq 0$

$$f(x) = (1 + \delta)^x - (1 + \delta x) \Rightarrow f'(x) = (1 + \delta)^x \ln(1 + \delta) - \delta$$

Si calcolano i punti stazionari di  $f(x)$ :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + \delta)^x \ln(1 + \delta) = \delta \Rightarrow (1 + \delta)^x = \frac{\delta}{\ln(1 + \delta)}$$

$$e^{\ln(1 + \delta)^x} = e^{\ln\left(\frac{\delta}{\ln(1 + \delta)}\right)} \Rightarrow e^{x \ln(1 + \delta)} = e^{\ln\left(\frac{\delta}{\ln(1 + \delta)}\right)}$$
$$x_0 = \frac{\ln\left(\frac{\delta}{\ln(1 + \delta)}\right)}{\ln(1 + \delta)}$$

Quindi si ha un solo punto stazionario.

Si dimostra adesso che  $x_0 > 0$ : affinché  $x_0 > 0$  deve essere

$$\ln \left( \frac{\delta}{\ln(1+\delta)} \right) < 0 \quad (\text{G.2})$$

questo, perchè  $\ln(1+\delta) < 0$  in quanto  $-1 \leq \delta \leq 0$ .

La (G.2) è verificata quando:

$$\frac{\delta}{\ln(1+\delta)} < 1$$

Ricordando che  $\ln(1+\delta) < 0$ , si ha che la condizione  $\frac{\delta}{\ln(1+\delta)} < 1$ , è verificata quando

$$\delta > \ln(1+\delta)$$

Costruiamo una funzione

$$\tilde{f}(\delta) = \delta - \ln(1+\delta)$$

Se nell'intervallo  $] -1, 0[$ ,  $\tilde{f}(\delta)$  è positiva, si è dimostrata la tesi.

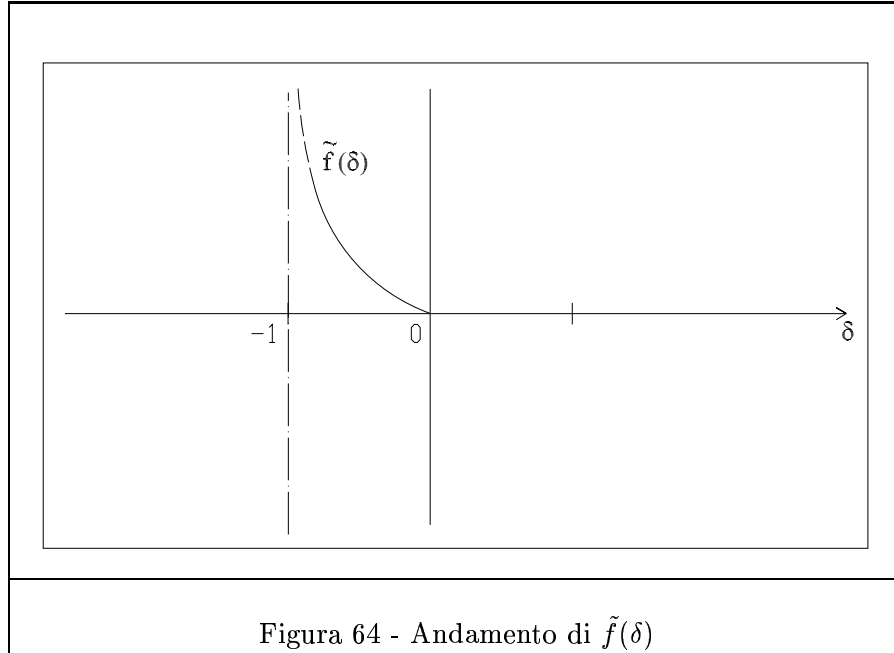
$$\tilde{f}(0) = 0 - \ln(1+0) = 0$$

$$\tilde{f}'(\delta) = 1 - \frac{1}{1+\delta} < 0$$

Quindi, essendo per  $\delta \in ] -1, 0[$   $\tilde{f}'(\delta) < 0$ , se ne deduce che  $\tilde{f}(\delta)$  sia una funzione Monotona decrescente. Si ha inoltre che:

$$\lim_{\delta \rightarrow -1^+} \tilde{f}(\delta) = +\infty$$

Quindi  $\tilde{f}(\delta)$  (senza approfondire lo studio della sua convessità) ha il seguente andamento:



Si conclude che  $\tilde{f}(\delta) > 0 \quad \forall \delta \in ]-1, 0[$

quindi  $x_0 > 0 \forall \delta \in ]-1, 0[$ .

Si dimostrerà che  $x_0 < 1$ ; per questo bisognerà dimostrare che

$$\frac{\ln\left(\frac{\delta}{\ln(1+\delta)}\right)}{\ln(1+\delta)} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{\delta}{\ln(1+\delta)}\right) > \ln(1+\delta)$$

Essendo la funzione Logaritmo ( $\ln$ ), una funzione crescente, si ha che la precedente disequazione, è verificata quando

$$\frac{\delta}{\ln(1+\delta)} > 1 + \delta \Rightarrow \delta < (1 + \delta) \ln(1 + \delta)$$

Si costruisce una funzione

$$\tilde{g}(\delta) = (1 + \delta) \ln(1 + \delta) - \delta$$

se si dimostra che  $\tilde{g}(\delta) > 0 \quad \forall \delta \in ]-1, 0[$  si è dimostrato che  $x_0 < 1$ .

$$\tilde{g}(0) = (1 + 0) \ln(1 + 0) - 0 = 0$$

$$\tilde{g}'(\delta) = \ln(1 + \delta) + \frac{1 + \delta}{1 + \delta} - 1 = \ln(1 + \delta) < 0 \quad \forall \delta \in ]-1, 0[$$

Quindi  $\tilde{g}(\delta)$  è una funzione Monotona Decrescente  $\forall \delta \in ]-1, 0[$ .

$$\lim_{\delta \rightarrow -1^+} \tilde{g}(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow -1^+} (1 + \delta) \ln(1 + \delta) - \delta$$

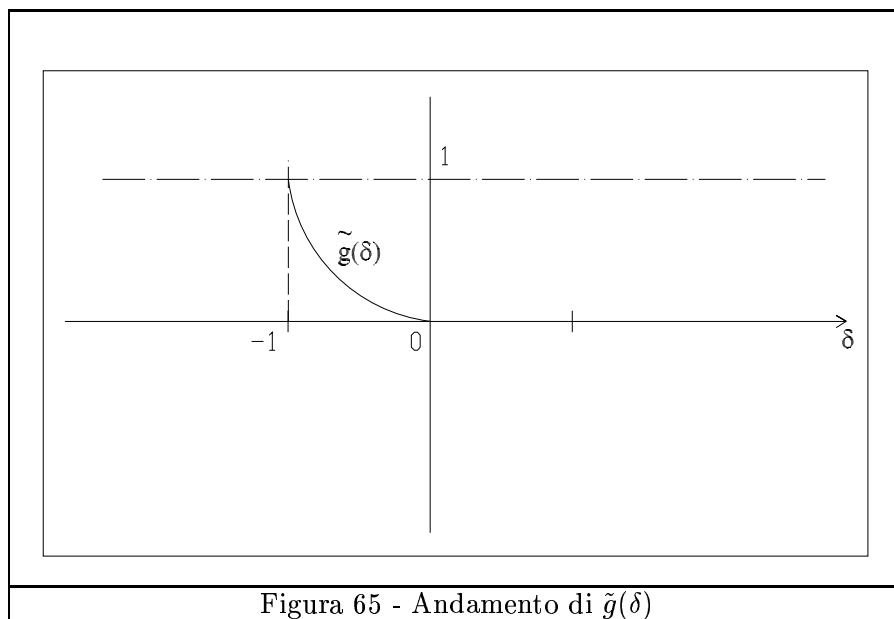
Poniamo  $y = 1 + \delta$ , per  $\delta \rightarrow -1^+$   $y \rightarrow 0^+$  e  $\delta = y - 1$ , effettuato questo cambio di variabile, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln(y) - (y - 1) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(y)}{1/y} - (1 - y) = \\ &= \text{Utilizzando L'Hopital} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1/y}{-1/y^2} + 1 = 1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{\delta \rightarrow -1^+} \tilde{g}(\delta) = 1$$

La funzione  $\tilde{g}(\delta)$ , ha un andamento simile al seguente:



Quindi

$$\tilde{g}(\delta) > 0 \quad \forall \delta \in ]-1, 0[$$

Si è, quindi, dimostrato che la  $f'(x)$  si annulla in un punto  $x_0 \in ]0, 1[$ .

Si studierà, la convessità della funzione  $f(x)$ :

$$f''(x) = (1 + \delta)^x \ln^2(1 + \delta) - \delta = (f'(x) + \delta) \ln(1 + \delta) - \delta$$

per  $x = x_0$  si ha:

$$f''(x_0) = (f'(x_0) + \delta) \ln(1 + \delta) - \delta = \delta (\ln(1 + \delta) - 1)$$

Ricordando che  $\ln(1 + \delta) < 0$ , si ha:

$$f''(x_0) = \delta (\ln(1 + \delta) - 1) > 0$$

Cioè  $x_0$  è un punto di minimo relativo interno per  $f(x)$ ; quindi esisterà un intorno di  $x_0$  in cui  $f(x)$  è convessa, ed in generale risulta convessa su tutto  $\mathbb{R}$ , cioè  $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Ciò vuol dire che  $f'(x)$  è una funzione Monotona crescente su tutto  $\mathbb{R}$ , ma essendo  $f'(x_0) = 0$ , segue che:

$$\forall x \in [x_0, +\infty[, f'(x) \geq 0$$

Analogamente, per  $x \in ]-\infty, x_0]$ ,  $f'(x) < 0$ . In conclusione,  $f(x)$  ha un andamento di questo genere:

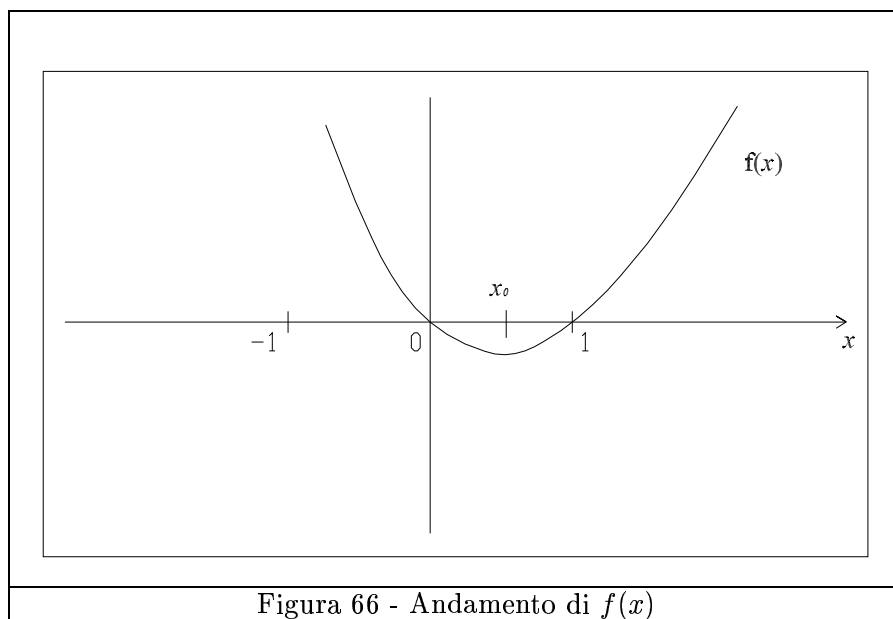


Figura 66 - Andamento di  $f(x)$

Quindi, per  $-1 \leq \delta \leq 0$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \{ ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[ \}$$

Cioè la disuguaglianza di Bernoulli è verificata, per i valori di  $\delta$  indicati, nel suddetto insieme.

3. Per  $\delta > 0$  Si possono ripetere identici ragionamenti al caso precedente, arrivando alla conclusione:

$$\forall \delta > 0 \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \{ ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[ \}$$

Allora, si può affermare che, la disuguaglianza di Bernoulli è verificata, considerando  $\delta > -1$

$$\forall x \in \{ ] - \infty, 0] \cup [1, +\infty[ \}$$

4. Per  $\delta \leq -1$  Questo caso non è da considerarsi caso interessante, in quanto il primo membro della disuguaglianza di Bernoulli verrebbe ad essere un esponenziale di base non positiva, ad esponente reale, e tale esponenziale può perdere di significato nell'Analisi Matematica; infatti consideriamo, per esempio, la potenza:

$$(-3)^2$$

Essa ha perfettamente senso se il 2 è nell'ambito dei numeri Interi Relativi, ma cosa succede, se si considera appartenente ai numeri razionali? Si può scrivere:

$$(-3)^2 = (-3)^{\frac{4}{2}} = [(-3)^{\frac{1}{2}}]^4$$

si osserva che

$$(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$$

non ha senso nell'ambito dei numeri Reali.

Quindi, se non ha senso parlare di esponenziali di base non positiva, ad esponente Razionale, non ne ha, a maggior ragione, nell'ambito degli esponenti Reali!

## Appendice H

### Calcolo di: $\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx$

In questa sezione verrà trattata la procedura con la quale è possibile effettuare un calcolo approssimato quanto si vuole, del noto integrale:

$$I = \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Si sfrutta lo sviluppo in serie di Taylor <sup>1</sup> del  $\sin(x)$ :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Quindi, sostituendo nell'integrale:

$$I = \int_a^b \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} dx = \int_a^b \left[ \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] dx$$

$\frac{1}{x}$  è un termine “costante” dal punto di vista della serie, quindi:

$$I = \int_a^b \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right] dx$$

La Serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

è Uniformemente Convergente (Per il Criterio di Convergenza di Leibniz <sup>2</sup>); quindi si può utilizzare il Teorema dell'Integrazione per Serie <sup>3</sup>:

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_a^b x^{2n} dx$$

---

<sup>1</sup>Vedi pag.40

<sup>2</sup>Vedi pag.91

<sup>3</sup>Vedi pag.92



Quindi, banalmente:

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_a^b$$

Ovvero:

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} (b^{2n+1} - a^{2n+1})$$

Per un calcolo approssimativo di tale valore, si può considerare la somma finita:

$$I_m = \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} (b^{2n+1} - a^{2n+1})$$

dei primi  $m$  termini della serie.

In base a quanto ottenuto, si ha:

$$\int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} (t^{2n+1})$$

Analoghe considerazioni, possono essere fatte per le forme integrali, per le quali non è possibile esprimere in maniera semplice le primitive delle funzioni integrande <sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Vedi pag.45

# Appendice I

## Richiami di Algebra Lineare

### I.1 Definizioni e Teoremi

**Definizione 105 (Matrice)** *Un insieme di  $m \cdot n$  numeri (reali o complessi) situati in una tabella rettangolare di  $m$  righe ed  $n$  colonne*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si chiama **Matrice**  $n \times m$ .

I termini  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$   $j = 1, 2, \dots, n$ ), si dicono “elementi della matrice  $A$ ”.

**Definizione 106 (Matrice diagonale)** *Una matrice  $A$  del tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

prende il nome di **Matrice diagonale** e si indica con  $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ; e nel caso in cui  $\alpha_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) il nome di **Matrice Unità** (o Unitaria) e si denota con la lettera  $I$ .

**Definizione 107 (Matrice Triangolare)** *Matrici del tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

prendono il nome di **Matrici triangolari**; e precisamente la matrice  $A$  è **Triangolare Inferiore**, e  $B$  è **Triangolare Superiore**.

**Definizione 108 (Matrice Trasposta)** Data una matrice  $A$  ( $n \times m$ ), si definisce **Matrice Trasposta** di  $A$ , e si indica con  $A^T$ , quella matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Definizione 109 (Matrice Trasposta Coniugata)** Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  di elementi  $a_{ij}$ , si definisce matrice trasposta coniugata la matrice  $B$ , di elementi  $b_{ij}$ , tale che  $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ . Essa viene rappresentata con il simbolo  $A^H$ .

**Definizione 110 (Matrici Particolari)** Si definiscono le seguenti Matrici.

- *Matrice Hermitiana:*  $A = A^H$
- *Matrice Unitaria:*  $A^H A = A A^H = I$
- *Matrice Normale:*  $A^H A = A A^H$
- *Matrice Simmetrica:*  $A = A^T$

**Definizione 111 (Matrice di Permutazione)** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si dice di Permutazione, quando è ottenuta dalla matrice Identica ( $I$ ) operando su di essa una qualsiasi permutazione delle righe (o colonne).

**Definizione 112 (Matrice a predominanza diagonale forte)** Una Matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è detta a Predominanza Diagonale Forte se:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

**Definizione 113 (Matrice a predominanza diagonale debole)** Una Matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è detta a Predominanza Diagonale Debole se:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

e per almeno un indice  $r$  tale che  $1 \leq r \leq n$  si abbia:

$$|a_{rr}| > \sum_{j=1, j \neq r}^n |a_{rj}|$$

**Definizione 114 (Determinante)** Si denota col termine **Determinante di una matrice Quadrata** ( $m = n$ ), e si indica nel seguente modo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

il numero Reale (o Complesso) ottenuto da:

$$\det(A) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (-1)^\beta a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

Somma estesa a tutte le permutazioni possibili  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  e tale che  
 $\beta = 0$  se la permutazione è pari  
 $\beta = 1$  se la permutazione è dispari.

**Definizione 115 (Traccia)** Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  di elementi  $a_{ij}$ , si definisce Traccia di  $A$  il numero:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Definizione 116 (Uguaglianza tra Matrici)** Due matrici,  $A = [a_{ij}]$   $B = [b_{ij}]$  si dicono **uguali** se, e solo se, hanno elementi corrispondenti uguali, cioè risulta:  $a_{ij} = b_{ij}$ .

**Definizione 117 (Somma algebrica di Matrici)** Date due matrici **di pari dimensione**  $n \times m$ ,  $A = [a_{ij}]$   $B = [b_{ij}]$ , si definisce matrice somma, la matrice:

$$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

cioè la matrice, i cui elementi sono costituiti dalla somma (algebrica) degli elementi corrispondenti delle matrici  $A, B$ .

La definizione data, gode delle seguenti proprietà:

- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + B = B + A$
- $A + 0 = A$  dove  $0$  è la matrice **nulla**, cioè con tutti elementi nulli.

**Definizione 118 (Prodotto di uno scalare per una Matrice)** Data una matrice  $A$ , ed uno scalare (anche complesso)  $\alpha$ , si definisce **prodotto dello scalare, per la matrice data**, la matrice

$$\alpha A = A\alpha = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Il Prodotto così definito gode delle seguenti proprietà:

- $1A = A$
- $0A = 0$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \beta B$

Dove  $\alpha, \beta$  sono scalari, e  $A, B$  sono Matrici.

**Definizione 119 (Prodotto di Matrici)** Siano date due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mq} \end{pmatrix}$$

rispettivamente  $m \times n$  e  $p \times q$ . Se il numero di colonne della matrice  $A$  è **uguale** al numero di righe della matrice  $B$ , cioè  $n = p$ , allora si definisce **Prodotto righe per colonne** quell'operazione il cui risultato è una matrice  $C$   $m \times q$ , i cui elementi sono dati da:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q)$$

Il prodotto così definito, gode delle seguenti proprietà:

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(AB)C = A(BC)$
- $(\alpha A)B = \alpha(AB)$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $AI = IA = A$
- **NOTARE CHE, IN GENERALE:**  $AB \neq BA$

## Proprietà dei Determinanti $n \times n$

1.  $\det(A) = \det(A^T)$
2. Se la matrice  $A$ , ha una riga o una colonna di elementi nulli, allora  $\det(A) = 0$
3.  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

4. Se in  $A$ , si scambiano tra loro due righe o due colonne, il determinante cambia di segno.
5. Se  $A$ , ha due righe o due colonne uguali o multiple l'una dell'altra, allora  $\det(A) = 0$
6. Se  $A$ , ha una riga o colonna che risulta essere combinazione lineare delle altre, allora  $\det(A) = 0$

**Corollario 14** *Data una matrice  $A$  **Diagonale** o **Triangolare**, si ha:*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

**Corollario 15** *Date due matrici  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , si ha:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

**Definizione 120 (Matrice Singolare)** *Una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  si dice Singolare se è:  $\det(A) = 0$*

**Definizione 121 (Minore Complementare)** *Data una matrice  $A$  quadrata di ordine  $n$ , si definisce **Minore Complementare**  $M_{ij}$ , relativo all'elemento  $a_{ij}$  della matrice, il determinante della matrice di ordine  $n - 1$ , ottenuta togliendo alla matrice  $A$  la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna.*

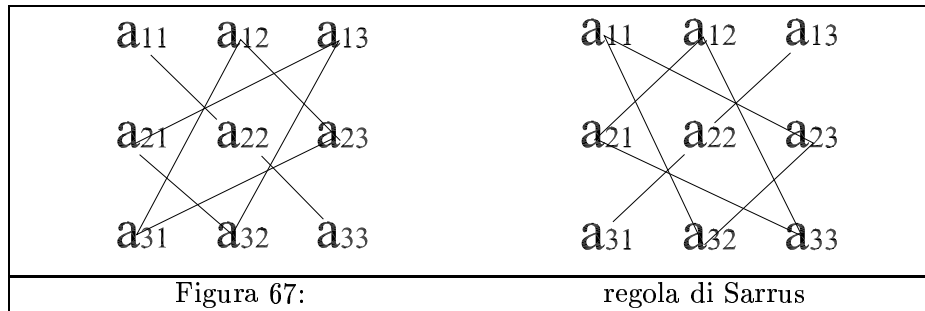
**Definizione 122 (Aggiunto o Complemento Algebrico)** *Data una matrice  $A$  quadrata di ordine  $n$ , si definisce **Aggiunto**  $A_{ij}$ , relativo all'elemento  $a_{ij}$  della matrice  $A$ , il seguente numero:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

dove  $M_{ij}$  è il Minore Complementare.

**Teorema 128 (di Laplace)** *Il determinante di una matrice quadrata, è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una sua linea (riga o colonna) per i rispettivi Aggiunti.*

**Metodo 1 (di Sarrus)** *Data una Matrice  $A$ ,  $3 \times 3$  (e solo  $3 \times 3$ ), il suo determinante può essere calcolato con la seguente regola: si sommano i prodotti dei termini che stanno sulla diagonale principale ed ai vertici dei triangoli indicati in figura G1 con i prodotti, cambiati di segno, dei termini che stanno sulla diagonale secondaria ed ai vertici dei triangoli indicati in figura G2; ovvero:*



$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

**Definizione 123 (Matrice Inversa)** Data un matrice  $A$  non Singolare ( $\det(A) \neq 0$ ), si definisce **Matrice inversa** di  $A$ , e si indica con  $A^{-1}$ , la matrice, tale che:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Essa si calcola nel seguente modo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

dove  $\Delta = \det(A)$  e tutti gli  $A_{ij}$  sono i corrispettivi Aggiunti di  $A$ . La Matrice inversa, se esiste, è unica. Si hanno le seguenti proprietà della matrice inversa:

- $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$

**Definizione 124 (Matrice Unitaria od Ortogonale)** Una matrice **quadrata** si dice Unitaria, od Ortogonale, se i suoi elementi sono numeri reali, e la sua inversa coincide con la sua trasposta, cioè  $A^{-1} = A^T$

**Teorema 129** Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia unitaria è che la somma dei quadrati degli elementi di una stessa riga (o colonna) sia uguale ad 1, e la somma dei prodotti degli elementi corrispondenti di due righe (o colonne) sia uguale a 0.

**Definizione 125 (Minore Estratto)** Data una matrice  $m \times n$ , si definisce Minore Estratto di tale matrice, il Determinante della matrice che si ottiene dalla prima, considerando ordinatamente gli elementi comuni ad alcune righe e ad altrettante colonne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \alpha & 5 \\ 2 & 2 & -\alpha & -7 \end{pmatrix}$$

i minori estratti possono essere di ordine massimo uguale a 3, alcuni di essi sono:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 2 & 2 & -\alpha \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{ecc.}$$

Quelli di ordine 2 sono, per esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix} \quad \text{ecc.}$$

In generale, una matrice  $n \times m$  ha un numero di Minori Estratti di ordine  $\sigma$  dato da:

$$N = \binom{n}{\sigma} \cdot \binom{m}{\sigma} \quad \text{dove i termini } \binom{n}{\sigma} \text{ e } \binom{m}{\sigma}$$

sono coefficienti Binomiali.

**Definizione 126 (Caratteristica o Rango di una Matrice)** Si definisce Caratteristica o Rango di una matrice  $n \times m$ , l'ordine massimo dei suoi Minori Estratti NON NULLI. Ovvero, dire che una matrice ha Rango pari ad "r", vuol dire che la matrice abbia almeno un minore di ordine "r" diverso da zero, e che TUTTI i minori di ordine "r + 1" siano nulli.

**Teorema 130** Condizione necessaria e sufficiente affinché una riga (colonna) di una matrice A, sia combinazione lineare delle altre righe (colonne), è che la matrice B, ottenuta sopprimendo la riga (colonna) in esame, abbia caratteristica uguale a quella di A.

**Osservazione 51** Se una matrice A, ha Rango pari ad "r" nell'insieme dei suoi vettori (riga o colonna), vi sono "r", e non più di "r", vettori linearmente indipendenti.

**Definizione 127 (Potenza di una Matrice)** Sia A un matrice quadrata, e p un numero Intero; si ha:

$$\bullet \quad A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_p \text{ volte}$$



- $A^0 \triangleq I$
- $A^{-p} = (A^{-1})^p$

Con le notazioni usate, si hanno le seguenti regole:

- $A^p A^q = A^{p+q}$
- $(A^p)^q = A^{pq}$
- Se  $A$  e  $B$  sono **Commutabili** ( $AB = BA$ ), allora:

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \quad (\text{Binomio di Newton})$$

**Definizione 128 (Matrice Convergente)** Una Matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è detta *Convergente* se:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = \emptyset$$

dove  $\emptyset$  è la matrice nulla.

**Definizione 129 (Autovalori di una Matrice)** Data una Matrice quadrata  $A$ , si definiscono **Autovalori** di  $A$  quei numeri (Reali o Complessi)  $\lambda_i$  che soddisfino la seguente equazione:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

**Osservazione 52** Gli autovalori di una matrice triangolare o diagonale a blocchi, con blocchi diagonali quadrati, sono tutti e soli gli autovalori dei blocchi diagonali.

**Definizione 130 (Autovettori di una Matrice)** Sia data una Matrice quadrata  $A$ , e siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  i suoi Autovalori; si definisce **Autovettore** associato all'autovalore  $\lambda_i$ , quel vettore  $\underline{u}_i \neq \underline{0}$ , tale che:

$$(A - \lambda_i I) \cdot \underline{u}_i = \underline{0}$$

Si noti che la matrice  $(A - \lambda_i I)$  è una matrice Singolare, quindi per ogni Autovalore  $\lambda_i$ , esistono infiniti Autovettori ad esso associati.

**Corollario 16** Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , di autovalori  $\lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, n$  si ha:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$$

**Corollario 17** Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , di autovalori  $\lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, n$  si ha:

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$$

Da ciò si intuisce che la matrice  $A$  ha almeno un autovalore nullo, se e solo se  $\det(A) = 0$ .

**Teorema 131** Le matrici hermitiane e definite **positive** (negative) hanno autovalori **positivi** (negativi) e viceversa.

**Teorema 132** Le matrici hermitiane e **semidefinite positive** (negative) hanno autovalori non negativi (non positivi) e viceversa.

**Definizione 131 (Raggio Spettrale)** Si dice Raggio Spettrale della matrice  $A$  il numero Reale non negativo:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

**Teorema 133** Una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è convergente se e solo se il suo raggio spettrale è minore di 1.

**Definizione 132 (Matrici Simili)** Data una matrice  $A$  ed una  $S$  non singolare, si dice Trasformata per Similitudine della matrice  $A$ , la matrice  $B$  tale che:

$$B = S^{-1}AS$$

Le matrici  $A$  e  $B$  si dicono **Simili**.

**Teorema 134** Due matrici **simili** hanno gli stessi autovalori. Inoltre, per ogni autovalore  $\lambda$  di  $A$ , se  $x$  è autovettore di  $A$ , allora  $S^{-1}x$  è autovettore di  $B$ .

**Teorema 135** Se  $A$  possiede l'autovalore  $\lambda$  e  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k$  possiede l'autovalore  $\lambda^k$  e gli autovettori di  $A$  sono anche autovettori di  $A^k$ .

**Teorema 136** Gli autovalori di una matrice Hermitiana sono tutti Reali

**Definizione 133 (Molteplicità Algebrica)** Dicesi **Molteplicità Algebrica** di un autovalore  $\lambda$  (e si indicherà con  $\alpha(\lambda)$ ), la molteplicità di  $\lambda$  come radice dell'equazione caratteristica.

**Definizione 134 (Molteplicità Geometrica)** Dicesi **Molteplicità Geometrica** di un autovalore  $\lambda$  (e si indicherà con  $\gamma(\lambda)$ ), la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo  $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ .  
Si ha che

$$\gamma(\lambda) = n - r(A - \lambda I)$$

Dove  $n$  è la dimensione di  $A$ , ed  $r(A - \lambda I)$  è il Rango della matrice  $(A - \lambda I)$ .

**Corollario 18** Per ogni autovalore  $\lambda$ , risulta:

$$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \leq n$$

**Teorema 137** Se  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  sono autovalori distinti gli autovettori ad essi associati sono linearmente indipendenti.

**Definizione 135 (Matrice Diagonalizzabile)** Una matrice  $A$  si dice Diagonalizzabile se esiste una matrice  $X$  non singolare tale che

$$X^{-1}AX = D$$

dove  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e  $i \lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sono gli autovalori di  $A$ .

**Teorema 138** Una matrice è diagonalizzabile se e solo se per ogni suo autovalore  $\lambda$  si ha:

$$\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$$

## I.2 Matrici Partizionate e Riducibili

Nel caso in cui si abbia a che fare con matrici quadrate, può risultare agevole partizionare tali matrici mediante blocchi (anch'essi quadrati) in maniera tale che la matrice stessa risulti composta da sottomatrici della matrice principale. Si possono, quindi, avere matrici Diagonali a Blocchi e Triangolari a Blocchi:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & A_{22} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & A_{kk} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_{11} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ \emptyset & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

In questi casi si ha:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^k \det(A_{ii})$$

**Definizione 136 (Matrice Riducibile)** Una Matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  si dice riducibile se esiste una matrice di permutazione  $P$  tale che, la matrice  $B = P^T A P$  sia della forma:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & \emptyset \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

con blocchi diagonali Quadrati.

Esistono dei metodi grafici che permettono di stabilire se una data matrice sia riducibile o irriducibile.

**Definizione 137 (Grafo Orientato)** Data una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , fissati ad arbitrio su un piano  $n$  punti  $N_1, N_2, \dots, N_n$  (detti **Nodi**), si dice **Grafo Orientato** associato ad  $A$ , il grafo che si ottiene congiungendo  $N_i$  con  $N_j$  con un cammino orientato da  $N_i$  ad  $N_j$  per ogni  $a_{ij} \neq 0$

**Esempio:** data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il Grafo orientato ad essa associato è

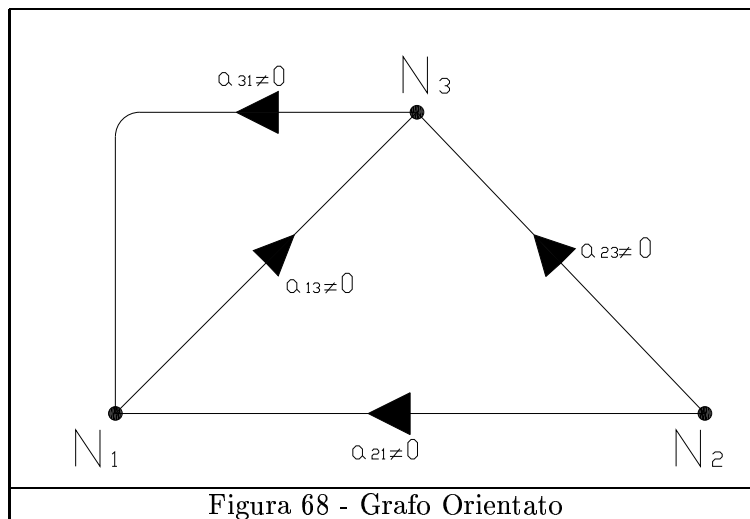


Figura 68 - Grafo Orientato

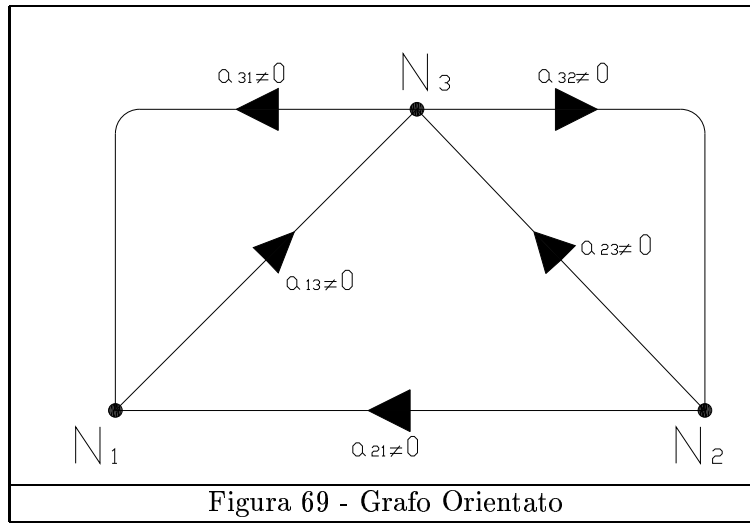
I tragitti  $N_1 \rightarrow N_2$  ed  $N_3 \rightarrow N_2$  non sono fattibili in quanto  $a_{12} = a_{32} = 0$ .

**Definizione 138 (Grafo Fortemente Connesso)** Un Grafo Orientato si dice **fortemente connesso** se da ogni nodo  $N_i$ , si può raggiungere qualunque altro nodo  $N_j$  seguendo un cammino orientato, eventualmente passando per altri nodi.

**Esempio:** data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il Grafo orientato ad essa associato è



Si noti come ogni nodo sia raggiungibile dagli altri, quindi il grafo orientato associato alla matrice  $A$ , risulta **Fortemente Connesso**.

**Teorema 139** Una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è **irriducibile** se e solo se il grafo orientato ad essa associato risulta **Fortemente Connesso**.

**Teorema 140 (di Jordan)** Ogni matrice  $A$ , di ordine  $n$ , avente  $k \leq n$  autovalori distinti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , è simile ad una matrice diagonale a blocchi; cioè esiste una matrice  $H$  non singolare tale che:

$$H^{-1}AH = J = \text{diag} \left( J^{(1)}, J^{(2)}, \dots, J^{(k)} \right) \quad (\text{Forma Canonica di Jordan})$$

dove ogni blocco diagonale  $J^{(i)}$  è di ordine  $\alpha(\lambda_i)$   $i = 1, 2, \dots, k$ . ed è anch'esso di forma diagonale a blocchi, avendosi

$$J^{(i)} = \text{diag} \left( J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, \dots, J_{\gamma(\lambda_i)}^{(i)} \right)$$

ciascun blocco  $J_l^{(i)}$ , detto **Blocco di Jordan**, è della forma:

$$J_l^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

### I.3 Norme

Spesso è necessario confrontare fra loro due vettori o due matrici; a tale scopo è utile il concetto di Norma.

### I.3.1 Norme Vettoriali

**Definizione 139** Si dice **norma vettoriale**, e si indica con  $\|\vec{x}\|$ , una funzione, definita nello spazio vettoriale  $\mathbb{C}^n$ , a valori reali non negativi, che verifica le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &= 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0 \\ \|\alpha \cdot \vec{x}\| &= |\alpha| \cdot \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n, \forall \alpha \in \mathbb{C} \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n\end{aligned}$$

Fra tutte le infinite Norme, quelle più utilizzate sono:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| && \text{norma 1} \\ \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} && \text{norma 2 o norma Euclidea} \\ \|\vec{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| && \text{norma } \infty\end{aligned}$$

**Teorema 141** Ogni norma vettoriale è uniformemente continua su  $\mathbb{C}^n$ .

**Teorema 142 (Equivalenza tra Norme)** Date due norme  $\|\vec{x}\|_p$  e  $\|\vec{x}\|_q$ , esistono due costanti reali e positive  $\alpha$  e  $\beta$  tali che

$$\alpha \|\vec{x}\|_p \leq \|\vec{x}\|_q \leq \beta \|\vec{x}\|_p \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n$$

### I.3.2 Norme Matriciali

**Definizione 140** Si dice **norma matriciale**, e si indica con  $\|A\|$ , una funzione, definita in  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , a valori reali non negativi, che verifica le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\|A\| &= 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ \|\alpha \cdot A\| &= |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \forall \alpha \in \mathbb{C} \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}\end{aligned}$$

Si possono costruire norme matriciali facendo ricorso alle norme vettoriali, definendo:

**Definizione 141 (Norma indotta)**

$$\|A\| = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A \cdot \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

in questo caso la norma matriciale si dice **naturale o indotta** dalla norma vettoriale considerata.

Le norme matriciali indotte dalle tre norme vettoriali indicate precedentemente, sono:

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| && \text{norma 1} \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^H A)} && \text{norma 2 o Euclidea} \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| && \text{norma } \infty\end{aligned}$$

**Definizione 142 (Norma di Frobenius)** *Un esempio di norma **non indotta** è quella di Frobenius, così definita:*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

**Teorema 143** *Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ; per ogni norma matriciale indotta vale la relazione:*

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

**Corollario 19** *Affinchè una matrice sia convergente è sufficiente che una sua norma indotta (qualsiasi) risulti minore di 1.*

**Corollario 20** *Sia  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ; gli autovalori di  $A$  appartengono al cerchio*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\} \quad \forall \text{ norma indotta di } A$$

## I.4 Sistemi di Equazioni Algebriche Lineari

Dato un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n & = k_3 \\ \dots & = \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = k_m \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Dove i termini  $a_{ij}$  e  $k_i$  siano numeri reali o complessi assegnati; si pone:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \dots \\ k_m \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema dato si può scrivere in forma Matriciale:

$$AX = K$$

Se tutti i **termini noti** ( $k_i$ ) sono nulli, il sistema si dice **Omogeneo**.

Una qualsiasi n-upla di numeri reali o complessi:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \dots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

che sostituita nel sistema dato, lo renda un'identità, si dice **Soluzione** del sistema stesso.

**Definizione 143 (Sistema Possibile)** *Il sistema si dice **Possibile** se esso ha almeno una soluzione, si dice **Impossibile** altrimenti.*

**Definizione 144 (Sistema Determinato)** *Un sistema Possibile si dice **Indeterminato** se ha Infinite soluzioni, mentre si dice **Determinato** se ne ha una sola, **Identicamente Soddisfatto** se ogni  $n$ -upla ne è soluzione.*

**Definizione 145 (Sistemi Equivalenti)** *Due sistemi Lineari, si dicono **Equivalenti**, se hanno le medesime soluzioni.*

**Metodo 2 (di Cramer)** *Dato un sistema lineare  $AX = K$ , di  $n$  equazioni in  $n$  incognite, se è*

$$\det(A) \neq 0$$

*allora il sistema ha **UNA SOLA SOLUZIONE** ed è tale che:*

$$X = A^{-1}K$$

**Definizione 146 (Matrice Incompleta e Completa)** *Dato un sistema (I.1); la matrice:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*si dice **Matrice Incompleta**; mentre la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & k_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & k_m \end{pmatrix}$$

*si dice **Matrice Completa**.*

**Teorema 144 (di Capelli)** *Condizione necessaria e sufficiente, affinché il sistema (I.1) sia possibile, è che la Matrice Incompleta e quella Completa abbiano uguale Caratteristica (Rango).*

**Osservazione 53** *Ogni sistema omogeneo ha almeno una soluzione: quella nulla!*



## I.5 Calcolo della Matrice Inversa con il metodo di Gauss-Jordan

Quello che segue è il metodo utilizzato dai calcolatori per determinare l'inversa di una matrice.

A differenza del metodo di Cramer, che per matrici di grandi dimensioni sarebbe inutilizzabile, quest'ultimo permette un rapido raggiungimento della soluzione, con un onere computazionale minimo. Vediamo in cosa consiste: il concetto di base è quello per cui, dato un sistema lineare <sup>1</sup>

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

se  $A$  è invertibile ( $\det(A) \neq 0$ ), e quindi il sistema ammette un'unica soluzione, tale soluzione non cambia se si effettuano delle combinazioni lineari tra le equazioni del sistema, ovvero tra le righe (o colonne) della matrice  $A$ .

Per fare un esempio di prenda un sistema  $3 \times 3$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Nulla vieta di scriverlo nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ovvero, in forma compatta:

$$A \cdot X = B$$

E' evidente che le considerazioni fatte per il sistema lineare, sulla invarianza della soluzione a seguito dell'effettuazione di combinazioni lineari delle righe (o colonne) della matrice  $A$ , restano valide per il sistema  $A \cdot X = B$  dove  $X$  e  $B$  sono Matrici.

Cosa accade se si tenta di risolvere il Sistema

$$A \cdot X = I$$

La soluzione di tale sistema è, banalmente,

$$X = A^{-1}$$

Quindi per determinare l'inversa della matrice  $A$  basta risolvere il sistema  $A \cdot X = I$ .

---

<sup>1</sup>Naturalmente  $A$  è una matrice quadrata

Come precedentemente accennato, la soluzione del sistema si ottiene effettuando delle combinazioni lineari delle righe (o colonne) della matrice  $A$  **in maniera tale da annullare tutti gli elementi tranne quelli della diagonale principale**. E' molto complesso esprimere il procedimento in maniera generalizzata; quindi verranno proposti due esempi, il primo riguardante una matrice  $3 \times 3$  Reale, ed il secondo applicato ad una matrice partizionata a blocchi di dimensione qualsiasi (purchè quadrata).

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Si scrivono le matrici  $A$  ed  $I_{3 \times 3}$  affiancate:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Si procede in questo modo: si eliminano gli elementi della prima colonna, sottostanti il primo elemento della diagonale; in questo caso l'elemento in questione (in posizione  $[2, 1]$ ) è già nullo, quindi si procede con l'elemento in posizione  $[3, 1]$ , che è pari a 2. Per eliminare tale elemento si sostituisce la terza riga con quella ottenuta sommando la prima riga moltiplicata per  $-2$ :

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Si procede con la seconda colonna, annullando l'elemento in posizione  $[3, 2]$ : si sostituisce la terza riga con quella ottenuta sommando la terza attuale con la seconda moltiplicata per 7:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 7 & 1 \end{array} \right|$$

Abbiamo eliminato gli elementi sottostanti la diagonale principale; provvediamo ad eliminare gli elementi sovrastanti.

Si moltiplica la terza riga per  $\frac{1}{2}$  e si somma alla prima, il risultato si sostituisce alla prima riga:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 7 & 1 \end{array} \right|$$

Si moltiplica la seconda riga per  $-2$  e si somma alla prima, il risultato si sostituisce alla prima riga:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 7 & 1 \end{array} \right|$$

Abbiamo eliminato anche gli elementi sovrastanti la diagonale principale. A questo punto si divide la terza riga per 2, ottenendo:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right|$$

Come si può notare, nella sezione di sinistra, in cui giaceva la matrice  $A$ , adesso giace la Matrice identica  $I$ ; la porzione di destra contiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Quest'ultima è la matrice inversa cercata!

Da notare che per calcolare l'inversa non è stato necessario calcolare alcun determinante, è evidente il vantaggio dal punto di vista della quantità di calcoli necessari.

Il vantaggio di tale metodo è ancora più evidente se utilizzato con matrici di grandi dimensioni, per le quali è possibile effettuare la partizione a blocchi. A tal proposito si riporta un esempio; sia:

$$M = \begin{bmatrix} A & -\alpha I \\ \alpha I & I \end{bmatrix}$$

Con  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $I$  matrice identità  $n \times n$ ; la matrice  $M$  risulta tale che  $M \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ .

$$\left| \begin{array}{cccc} A & -\alpha I & I & \emptyset \\ \alpha I & I & \emptyset & I \end{array} \right|$$

Per calcolare l'inversa di  $M$ , è necessario fare delle ipotesi preliminari sui vari blocchi della stessa; **supponiamo che  $A$  sia invertibile** e si moltiplica<sup>2</sup> la prima riga per  $-\alpha A^{-1}$  e si sommi alla seconda:

$$\left| \begin{array}{cccc} A & -\alpha I & I & \emptyset \\ \emptyset & \alpha^2 A^{-1} + I & -\alpha A^{-1} & I \end{array} \right|$$

---

<sup>2</sup>Si tenga presente che si tratta di prodotti matriciali e quindi, in generale, NON COMMUTATIVI

Si pone  $B = \alpha^2 A^{-1} + I$ :

$$\left| \begin{array}{cccc} A & -\alpha I & I & \emptyset \\ \emptyset & B & -\alpha A^{-1} & I \end{array} \right|$$

**Supponiamo che  $B$  sia invertibile**, allora si moltiplica la seconda riga per  $\alpha B^{-1}$  e si somma alla prima:

$$\left| \begin{array}{cccc} A & \emptyset & -\alpha^2 B^{-1} A^{-1} + I & \alpha B^{-1} \\ \emptyset & B & -\alpha A^{-1} & I \end{array} \right|$$

Infine, si moltiplica la prima riga per  $A^{-1}$  e la seconda per  $B^{-1}$ , ottenendo:

$$\left| \begin{array}{cccc} I & \emptyset & -\alpha^2 A^{-1} B^{-1} A^{-1} + A^{-1} & \alpha A^{-1} B^{-1} \\ \emptyset & I & -\alpha B^{-1} A^{-1} & B^{-1} \end{array} \right|$$

Da cui segue:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 A^{-1} B^{-1} A^{-1} + A^{-1} & \alpha A^{-1} B^{-1} \\ -\alpha B^{-1} A^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

Si tenga presente che la matrice appena calcolata ha senso se e solo se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \\ \det(B) = \det(\alpha^2 A^{-1} + I) \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} \end{array} \right.$$

## Appendice J

# Unità di Misura

In questo capitolo saranno trattate le unità di misura più usate a livello internazionale, nonché i fattori di conversione per convertire le varie grandezze in grandezze equivalenti del S.I.<sup>1</sup>

### J.1 S.I. - Sistema Internazionale

Doveroso e quantomeno obbligatorio dedicare alcune righe al SISTEMA INTERNAZIONALE, ed alla sua costituzione. Tutto nasce dall'esigenza di utilizzare comuni unità di misura per la quantificazione e la misura delle grandezze fisiche, allo scopo di favorire gli scambi commerciali e gli studi scientifici, tra persone della stessa, o differente nazione. A tal senso nel 1875, in quel di Parigi, i rappresentanti di soli 17 paesi, si riunirono per approvare la CONVENZIONE SUL METRO, e conseguentemente ad adottarne l'Unità per la Misura delle lunghezze. In contemporanea vide la luce anche l'organismo internazionale della metrologia: la Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure (CGPM). Nel corso degli anni sono state inserite altre unità fondamentali, sino ad arrivare alle 7 grandezze fondamentali, con le 2 unità supplementari attualmente in uso nel Sistema Internazionale, i multipli e sottomultipli decimali, e le altre unità derivate.

---

<sup>1</sup>Sistema Internazionale

## Unità fondamentali e supplementari del Sistema Internazionale

grandezza	unità	simbolo	definizione
lunghezza	metro	m	tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un tempo di $1/299\,792\,458$ di secondo
massa	kilogrammo	kg	massa del campione platino-iridio, conservato nel Museo Internazionale di Pesi e Misure di Sèvres (Parigi)
intervallo di tempo	secondo	s	durata di $9\,192\,631\,770$ periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133
intensità di corrente elettrica	ampere	A	quantità di corrente che, scorrendo all'interno di due fili paralleli e rettilinei, di lunghezza infinita e sezione trascurabile, immersi nel vuoto ad una distanza di un metro, induce in loro una forza di attrazione o repulsione di $2 \times 10^{-7}$ N per ogni metro di lunghezza
temperatura termodinamica	kelvin	K	valore corrispondente a $1/273,16$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua
quantità di sostanza	mole	mol	quantità di materia di una sostanza tale da contenere tante particelle elementari quante ne contengono $0,012$ kg di carbonio-12. Tale valore corrisponde al numero di <u>Avogadro</u>
intensità luminosa	candela	cd	intensità luminosa di una sorgente che emette una radiazione monocromatica con frequenza $540 \times 10^{12}$ Hz e intensità energetica di $1/683$ W/sr.

## Unità supplementari SI

angolo piano	radiante	rad	angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza pari al raggio. $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi$
angolo solido	steradiano	sr	angolo che su di una sfera con centro nel vertice dell'angolo intercetta una calotta di area uguale a quella di un quadrato avente lato uguale al raggio della sfera stessa.

## Unità definite indipendentemente alle unità SI di base

grandezza	unità	simbolo	definizione
massa	unità di massa atomica	u	l'unità di massa atomica è pari a $1/12$ della massa di un atomo del nuclide $^{12}\text{C}$
energia	elettronvolt	eV	l'elettronvolt è l'energia cinetica acquisita da un elettrone che passa nel vuoto da un punto ad un'altro che abbia un potenziale superiore di 1 volt

$$1 \text{ u} = 1.6605655 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6021892 \times 10^{-19} \text{ joule}$$

## Unità di misura derivate dal Sistema Internazionale

grandezza	unità	simbolo	unità M.K.S.
Forza	Newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Pressione	Pascal	Pa	$\text{N}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Energia-Lavoro	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Potenza	Watt	W	$\text{J}/\text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Quantità di Carica	Coulomb	C	$\text{A} \cdot \text{s}$
Tensione	Volt	V	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{C} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A} \cdot \text{s}^3)$
Capacità	Farad	F	$\text{C}/\text{V} = (\text{A} \cdot \text{s}^2)/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
Flusso Magnetico	Weber	Wb	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A} \cdot \text{s}^2)$
Induzione Magnetica	Tesla	T	$\text{Wb}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{A} \cdot \text{s}^2)$
Induttanza	Henry	H	$\text{V} \cdot \text{s}/\text{A} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A}^2 \cdot \text{s}^2)$
Resistenza-Impedenza	Ohm	$\Omega$	$\text{V}/\text{A} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$

## J.2 Lunghezza

### Unità di lunghezza (U.S.)

	pollici	links	piedi	yards	rods	chains	miglia	centi metri	metri
pollice	1	0.126263	0.083333	0.027777	0.005050	0.001262	0.000015	2.540005	0.0254
link	7.92	1	0.66	0.22	0.04	0.01	0.000125	20.11684	0.201168
piede	12	1.515152	1	0.333333	0.060606	0.015151	0.000189	30.48006	0.304800
yard	36	4.54545	3	1	0.181818	0.045454	0.000568	91.44018	0.914401
rod	198	25	16.5	5.5	1	0.25	0.003125	502.9210	5.029210
chain	792	100	66	22	4	1	0.0125	2011.684	20.11684
miglio	63360	8000	5280	1760	320	80	1	160934.72	1609.3472
centi metro	0.3937	0.049709	0.032808	0.010936	0.001988	0.000497	0.000006	1	0.01
metro	39.37	4.970960	3.280833	1.093611	0.198838	0.049709	0.000621	100	1

1 pollice (in.) = 25.4001 mm  
 1 piede (ft.) = 0.304801 m  
 1 yarde (yd.) = 0.914402 m  
 1 rod (rd.) = 5.02921 m  
 1 miglio (mi.) = 1.609347 Km

1 mm = 0.03937 in.  
 1 m = 3.28083 ft.  
 1 m = 1.093611 yd.  
 1 m = 0.198838 rd.  
 1 Km = 0.621370 mi.

In ordine alfabetico sono elencate le conversioni rispetto all'unità di 1 metro delle principali unità di misura anglosassoni e italiane (anche non più in uso)

angström (Å) = $1 \cdot 10^{-10}$	point = $0.351459 \cdot 10^{-3}$
anno luce = $9.46055 \cdot 10^{15}$	punto (p) = $0.37606 \cdot 10^{-3}$
bolt = 36.576	quadrिमिcron = $1 \cdot 10^{-15}$
cable = 185.2	quintimicron = $1 \cdot 10^{-18}$
chain = 30.48	saschen = 2.133562
cicero = $4.512 \cdot 10^{-3}$	siriometro = $1.4959 \cdot 10^{17}$
dalton = $1.650 \cdot 10^{-27}$	skein = 109.728
ell = 1.143	span = 0.2286
fathom (fm) = 1.8288	trimicron = $1 \cdot 10^{-12}$
fermi = $1 \cdot 10^{-15}$	unità astronomica (u.a.) = $1.4959 \cdot 10^{11}$
furlong (fur) = 201.1684	unità x (UX) = $1.00202 \cdot 10^{-13}$
hand = 0.1016	varas = 0.848174
leaughe (marina) = $5.556 \cdot 10^3$	versta = 1066.781
line = $0.635 \cdot 10^{-3}$	ximicron = $1 \cdot 10^{-12}$
miglio marino (intern.) = 1852	
nodo = 1853.181	
pace = 0.0762	
parsec (pc) = $3.08374 \cdot 10^{16}$	
perm (pm) = $1 \cdot 10^{-4}$	
pica (em) = $4.21751 \cdot 10^{-3}$	

### Per valutare le distanze astronomiche vengono usate misure particolari:

**unità astronomica** (U.A.) = distanza media Terra-Sole, corrispondente a ca. 149 500 000 Km (viene usata nelle misure del sistema solare).

**anno luce** = distanza percorsa dalla luce in un anno (vel. luce ~300 000 km al sec. che corrisponde a 9 milioni di milioni di Km.). Equivale a 63 000 U.A., quindi 63 000 volte la distanza Terra-Sole.

**parsec** = 3.2558 anni luce. Esso è rappresentato dalla distanza alla quale il raggio dell'orbita della Terra (circa la distanza media Terra-Sole) appare sotto un angolo di 1".

### antiche misure di lunghezza romane

1 piede = 0.296 m  
 1 passus = 5 piedi = 1.48 m  
 1 stadio = 125 passus = 185 m  
 1 miglio = 8 stadi = 1480 m

### misure nautiche

6 piedi = 1 fathom  
 100 fathoms = 1 cable length  
 6000 piedi = 1 miglio marino



## Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
ångström (Å)	meter (m)	1.0 E-10
ångström (Å)	nanometer (nm)	1.0 E-01
astronomical unit (AU)	meter (m)	1.495979 E+11
chain (based on U.S. survey foot) (ch)	meter (m)	2.011684 E+01
fathom (based on U.S. survey foot)	meter (m)	1.828804
fermi	meter (m)	1.0 E-15
fermi	femtometer (fm)	1.0
foot (ft)	meter (m)	3.048 E-01
foot (U.S. survey) (ft)	meter (m)	3.048006 E-01
inch (in)	meter (m)	2.54 E-02
inch (in)	centimeter (cm)	2.54
kayser(K)	reciprocal meter (m <sup>-1</sup> )	1 E+02
light year (l.y.)	meter (m)	9.46073 E+15
microinch	meter (m)	2.54 E-08
microinch	micrometer (mm)	2.54 E-02
micron (m)	meter (m)	1.0 E-06
micron (m)	micrometer (mm)	1.0
mil (0.001 in)	meter (m)	2.54 E-05
mil (0.001 in)	millimeter (mm)	2.54 E-02
mile (mi)	meter (m)	1.609344 E+03
mile (mi)	kilometer (km)	1.609344
mile (based on U.S. survey foot) (mi)	meter (m)	1.609347 E+03
mile (based on U.S. survey foot) (mi)	kilometer (km)	1.609347
mile, nautical	meter (m)	1.852 E+03
parsec (pc)	meter (m)	3.085678 E+16
pica (computer) (1/6 in)	meter (m)	4.233333 E-03
pica (computer) (1/6 in)	millimeter (mm)	4.233333
pica (printer's)	meter (m)	4.217518 E-03
pica (printer's)	millimeter (mm)	4.217518
point (computer) (1/72 in)	meter (m)	3.527778 E-04
point (computer) (1/72 in)	millimeter (mm)	3.527778 E-01
point (printer's)	meter (m)	3.514598 E-04
point (printer's)	millimeter (mm)	3.514598 E-01
rod (based on U.S. survey foot) (rd)	meter (m)	5.029210
yard (yd)	meter (m)	9.144 E-01



## J.3 Massa

## Unità di peso minori dei pounds e dei chilogrammi

	grani	apothecaries' scruples	pennyweights	avoirdupois drams	apothecaries' drams	avoirdupois ounces	apothecaries' troy ounces	apothecaries' troy pounds	avoirdupois pounds	grammi
grano	1	0.05	0.04166667	0.03657143	0.0166667	0.00228571	0.00208333	0.000173611	0.000142857	0.06479891
apoth. scruple	20	1	0.833333	0.7314286	0.333333	0.0457143	0.0416667	0.003472222	0.002857143	1.2959784
pennyweight	24	1.2	1	0.8777143	0.4	0.0548571	0.05	0.004166667	0.003428571	1.555174
avoir. dram	27.34375	1.367187	1.139323	1	0.4557292	0.0625	0.05696614	0.004747178	0.00390625	1.7718454
apoth. dram	60	3	2.5	2.194286	1	0.1371429	0.125	0.010416667	0.008571429	3.8879351
avoir. ounce	437.5	21.875	18.22917	16	7.29167	1	0.9114583	0.075954861	0.0625	28.349527
apoth. or, troy ounce	480	24	20	17.55428	8	1.0971429	1	0.08333333	0.05857143	31.103781
apoth. or, troy pound	5760	288	240	210.6514	95	13.165714	12	1	0.8228571	373.24177
avoir. pound	7000	350	291.6667	256	116.6667	16	14.583333	1.2152778	1	453.592427
grammo	15.43233	0.771618	0.64301485	0.5643833	0.2572059	0.03527396	0.03215074	0.00267923	0.00220462	1

## Unità di peso maggiori delle avoirdupois ounces

	avoirdupois ounces	avoirdupois pounds	short hundredweights	short tons	long tons	kilogrammi
avoird. ounce	1	0.0625	0.000625	0.00003125	0.00002790179	0.02834953
avoird. pound	16	1	0.01	0.0005	0.0004464286	0.453592427
short hundredweight	1600	100	1	0.05	0.04464286	45.359243
short ton	32000	2000	20	1	0.8928571	907.18486
long ton	35840	2240	22.4	1.12	1	1016.04704
kilogrammo	35.273957	2.2046223	0.022046223	0.0011023112	0.0009842064	1

grani (grain)	ounce troy, apoth. (oz tr)
apothecaries drams (drap)	pennyweight (dwt)
troy ounces (oz t)	scruple (s)
avoirdupois ounces (oz avdp)	quarter (qr)
avoirdupois pounds (lb avdp)	long ton (tn)
dram (dr)	short ton (sh tn)
hundredweight short (sh, cwt, ctl)	

## Altre grandezze riferite all'unità di 1 kg

bes = 1	hyle = $1.00029 \cdot 10^3$
firkin (butter) = 25.4012	pig = 25.4012
firkin (soap) = 28.1227	quarter (qr) = 12.700588
grano = $5 \cdot 10^{-5}$	slug = 14.5939
hundredweight long (cwt) = 50.80235	stone (st) = 6.350294
hyl = $9.80665 \cdot 10^{-3}$	ton (assay) = $29.16667 \cdot 10^{-3}$
carato metrico = $2 \cdot 10^{-4}$	unità di massa atomica(u) = $1.660565 \cdot 10^{-27}$
	sack = 101.605

### Stazza delle navi

Tonn. inglese = 100 piedi cubici inglesi = 12 tonn. di registro

Tonn. di registro =  $0.353 \text{ m}^3$

#### La Stazza e il Dislocamento

La stazza (detta anche tonnellaggio di registro) di una nave mercantile è rappresentata dal volume complessivo dei locali interni, e si misura in tonnellate di stazza, equivalenti ciascuna a 100 piedi cubi. La stazza lorda comprende tutti gli spazi chiusi e una determinata parte delle sovrastrutture, la stazza netta si ricava da quella lorda togliendo il volume dei locali motori e tutti gli altri in cui possono essere stivate merci. Il dislocamento rappresenta il peso totale della nave, pari al peso della massa d'acqua spostata, e si misura in tonnellate metriche = 1000 kg.

### L'Oncia

Ai tempi di "ROMA", l'oncia veniva utilizzata come unità di peso (ed anche di moneta). Pari ad 1/12 di libbra, che all'epoca risultava essere di poco inferiore a 500 g.. Nel corso dei tempi all'oncia vennero a corrispondere anche unità di lunghezza, riferite a frazioni del palmo, del braccio o 1/12 del piede.

### Il Carato e il Grano

Il **carato** (metrico = 0.2 g.; anglosassone = 0.26 g.) utilizzato nella misurazione delle pietre preziose, ha due significati: può essere misura di peso, oppure indicativo della finezza dell'oro. Nella valutazione delle pietre preziose, entra in lista anche il **grano**, pari ad 1/4 di carato (0.05 g.). Come misura di finezza il carato indica quante parti d'oro "fino" ci sono nelle 24 parti ideali in cui viene divisa la porzione di lega. La finezza o il titolo sono anche indicati con i millesimi. L'oro a 750 millesimi, equivale a 18 carati, ed è solitamente legato con rame (oro rosso), oppure argento, palladio o nichel (oro bianco).

## Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
carat, metric	kilogram (kg)	2.0 E-04
carat, metric	gram (g)	2.0 E-01
grain (gr)	kilogram (kg)	6.479891 E-05
grain (gr)	milligram (mg)	6.479891 E+01
hundredweight (long, 112 lb)	kilogram (kg)	5.080235 E+01
hundredweight (short, 100 lb)	kilogram (kg)	4.535924 E+01
kilogram-force second squared per meter (kgf*s <sup>2</sup> /m)	kilogram (kg)	9.80665
ounce (avoirdupois) (oz)	kilogram (kg)	2.834952 E-02
ounce (avoirdupois) (oz)	gram (g)	2.834952 E+01
ounce (troy or apothecary) (oz)	kilogram (kg)	3.110348 E-02
ounce (troy or apothecary) (oz)	gram (g)	3.110348 E+01
pennyweight (dwt)	kilogram (kg)	1.555174 E-03
pennyweight (dwt)	gram (g)	1.555174
pound (avoirdupois) (lb)	kilogram (kg)	4.535924 E-01
pound (troy or apothecary) (lb)	kilogram (kg)	3.732417 E-01
pound foot squared (lb*ft <sup>2</sup> )	kilogram meter squared (kg*m <sup>2</sup> )	4.214011 E-02
pound inch squared (lb*in <sup>2</sup> )	kilogram meter squared (kg*m <sup>2</sup> )	2.926397 E-04
slug (slug)	kilogram (kg)	1.459390 E+01
ton, assay (AT)	kilogram (kg)	2.916667 E-02
ton, assay (AT)	gram (g)	2.916667 E+01
ton, long (2240 lb)	kilogram (kg)	1.016047 E+03
ton, metric (t)	kilogram (kg)	1.0 E+03
tonne ( "metric ton" in U.S.) (t)	kilogram (kg)	1.0 E+03
ton, short (2000 lb)	kilogram (kg)	9.071847 E+02
ounce (avoirdupois) per square foot (oz/ft <sup>2</sup> )	kilogram per square meter (kg/m <sup>2</sup> )	3.051517 E-01
ounce (avoirdupois) per square inch (oz/in <sup>2</sup> )	kilogram per square meter (kg/m <sup>2</sup> )	4.394185 E+01
ounce (avoirdupois) per square yard (oz/yd <sup>2</sup> )	kilogram per square meter (kg/m <sup>2</sup> )	3.390575 E-02
pound per square foot (lb/ft <sup>2</sup> )	kilogram per square meter (kg/m <sup>2</sup> )	4.882428
pound per square inch (not pound force) (lb/in <sup>2</sup> )	kilogram per square meter (kg/m <sup>2</sup> )	7.030696 E+02
denier	kilogram per meter (kg/m)	1.111111 E-07
denier	gram per meter (g/m)	1.111111 E-04
poundper foot (lb/ft)	kilogram per meter (kg/m)	1.488164
pound per inch (lb/in)	kilogram per meter (kg/m)	1.785797 E+01
poundper yard(lb/yd)	kilogram per meter (kg/m)	4.960546 E-01
tex	kilogram per meter (kg/m)	1.0 E-06
poundper hour (lb/h)	kilogram per second (kg/s)	1.259979 E-04
pound per minute (lb/min)	kilogram per second (kg/s)	7.559873 E-03
pound per second (lb/s)	kilogram per second (kg/s)	4.535924 E-01
ton, short, per hour	kilogram per second (kg/s)	2.519958 E-01

grain per gallon (U.S.) (gr/gal)	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	1.711806 E-02
grain per gallon (U.S.) (gr/gal)	milligram per liter (mg/L)	1.711806 E+01
gram per cubic centimeter (g/cm <sup>3</sup> )	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	1.0 E+03
ounce (avoirdupois) per cubic inch (oz/in <sup>3</sup> )	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	1.729994 E+03
ounce (avoirdupois) per gallon [Canadian and U.K. (Imperial)] (oz/gal)	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	6.236023
ounce (avoirdupois) per gallon [Canadian and U.K. (Imperial)] (oz/gal)	gram per liter (g/L)	6.236023
ounce (avoirdupois) per gallon (U.S.) (oz/gal)	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	7.489152
ounce (avoirdupois) per gallon (U.S.) (oz/gal)	gram per liter (g/L)	7.489152
pound per cubic foot (lb/ft <sup>3</sup> )	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	1.601846 E+01
pound per cubic inch (lb/in <sup>3</sup> )	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	2.767990 E+04
pound per cubic yard (lb/yd <sup>3</sup> )	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	5.932764 E-01
pound per gallon [Canadian and U.K. (Imperial)] (lb/gal)	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	9.977637 E+01
pound per gallon [Canadian and U.K. (Imperial)] (lb/gal)	kilogram per liter (kg/L)	9.977637 E-02
pound per gallon (U.S.) (lb/gal)	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	1.198264 E+02
pound per gallon (U.S.) (lb/gal)	kilogram per liter (kg/L)	1.198264 E-01
slug per cubic foot (slug/ft <sup>3</sup> )	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	5.153788 E+02
ton, long, per cubic yard	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	1.328939 E+03
ton, short, per cubic yard	kilogram per cubic meter (kg/m <sup>3</sup> )	1.186553 E+03



## J.4 Tempo

### Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
day (d)	second (s)	8.64 E+04
day (sidereal)	second (s)	8.616409 E+04
hour (h)	second (s)	3.6 E+03
hour (sidereal)	second (s)	3.590170 E+03
minute (min)	second (s)	6.0 E+01
minute (sidereal)	second (s)	5.983617 E+01
second (sidereal)	second (s)	9.972696 E-01
shake	second (s)	1.0 E-08
shake	nanosecond (ns)	1.0 E+01
year (365 days)	second (s)	3.1536 E+07
year (sidereal)	second (s)	3.155815 E+07
year (tropical)	second (s)	3.155693 E+07

## J.5 Superficie

### Unità di misura della Superficie (U.S.)

unità	pollici quadr.	links quadr.	piedi quadr.	yards quadr.	rods quadr.	chains quadr.	acri	miglia quadr.	centi metri quadr.	metri quadr.	ettari
pollice q.	1	0.015942	0.006944	0.0007716	0.0000255	0.00000159	0.000000159	0.00000000024	6.451626	0.00064516	0.00000006
link q.	62.7264	1	0.4356	0.0484	0.0016	0.0001	0.00001	0.00000001562	404.6873	0.04046873	0.00000404
piede q.	144	2.295684	1	0.111111	0.003673	0.00022956	0.000022956	0.00000003587	929.0341	0.09290341	0.00000929
yard q.	1296	20.6612	9	1	0.0330578	0.00206612	0.000206612	0.00000032283	8361.307	0.8361307	0.00008361
rod q.	39204	625	272.25	30.25	1	0.0625	0.00625	0.00000976562	252929.5	25.29295	0.00252929
chain q.	627264	10000	4356	484	16	1	0.1	0.00015625	4046873	404.6873	0.0404687
acro	6272640	100000	43560	4840	160	10	1	0.0015625	40468726	4046.873	0.404687
miglio q.	40144896	64.00000	27874400	3.097600	102400	6400	640	1	25899984703	2.589998	258.9998
centi metro q.	0.154999	0.002471	0.001076	0.0001195	0.0000039	0.00000024	0.000000024	0.00000000003	1	0.0001	0.00000001
metro q.	1549.9969	21.7104	10.76387	1.195985	0.0395367	0.00247104	0.000247104	0.0000003851	10000	1	0.0001
ettaro	15499969	247104	107638.7	11959.85	395.367	24.7104	2.47104	0.003861006	100000000	10000	1

pollici quadrati (sq in.)

piedi     "     (sq ft)

yard     "     (sq yd)

acri     (acre)

centimetri quadrati (cm<sup>2</sup>)metri     "     (m<sup>2</sup>)

ettari     "     (ha)

kilometri     "     (km<sup>2</sup>)

### grandezze riferite all' unità di 1 metro quadrato

barn (b)= 1*10 <sup>-28</sup>	rood= 1011.7124
circular inch= 5.067095*10 <sup>-4</sup>	section= 2.589988*10 <sup>6</sup>
cicular mil (cm)= 5.067095*10 <sup>-10</sup>	township= 9.32957*10 <sup>7</sup>
darcy= 0.987*10 <sup>-12</sup>	
fermi (F)= 1*10 <sup>-28</sup>	

## J.6 Volume-Capacità

## Unità di Capacità per liquidi (U.S.)

	minims	drams fluide	once fluide	gills	pints liquidi	quarts liquidi	galloni	millilitri	litri	pollici cubi
minim	1	0.016666	0.002083	0.000520	0.0001302	0.000065	0.000016	0.06161	0.000061	0.003759
dram fluide	60	1	0.125	0.03125	0.007812	0.003906	0.000976	3.69661	0.003696	0.225586
oncia fluide	480	8	1	0.25	0.0625	0.03125	0.007812	29.5729	0.029572	1.80469
gill	1920	32	4	1	0.25	0.125	0.03125	118.292	0.118292	7.21875
pint liquido	7680	128	16	4	1	0.5	0.125	473.167	0.473167	28.875
quart liquido	15360	256	32	8	2	1	0.25	946.333	0.946333	57.75
gallone	61440	1024	128	32	8	4	1	3785.332	3.785332	231
millilitro	16.2311	0.270518	0.033814	0.008463	0.002113	0.001056	0.000264	1	0.001	0.061025
litro	16231.1	270.518	33.8147	8.45368	2.11342	1.05671	0.264178	1000	1	61.025
pollice cubo	265.974	4.4329	0.554113	0.138528	0.034632	0.017316	0.004329	16.3867	0.016386	1

U.S. fluid dram (fl dr)

millilitri (ml)

U.S. fluid ounces (fl oz)

litri (l)

U.S. liquid pints (pt)

U.S. liquid quart (qt)

U.S. gallon (gal)

## unità di capacità per aridi (U.S.)

	dry pints	dry quarts	pecks	bushels	litri	pollici cubi
dry pint	1	0.5	0.0625	0.015625	0.550599	33.600312
dry quart	2	1	0.125	0.03125	1.101198	67.200625
peck	16	8	1	0.25	8.80958	537.605
bushel	64	32	4	1	35.2383	2150.42
litro	1.81620	0.908102	0.113513	0.028378	1	61.0250
pollice cubo	0.0297816	0.0148808	0.0018601	0.000465025	0.0163867	1

## Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
acre-foot (based on U.S. survey foot)	cubic meter (m³)	1.233489 E+03
barrel [for petroleum, 42 gallons (U.S.)] (bbl)	cubic meter (m³)	1.589873 E-01
barrel [for petroleum, 42 gallons (U.S.)] (bbl)	liter (L)	1.589873 E+02
bushel (U.S.) (bu)	cubic meter (m³)	3.523907 E-02
bushel (U.S.) (bu)	liter (L)	3.523907 E+01
cord (128 ft³)	cubic meter (m³)	3.624556
cubic foot (ft³)	cubic meter (m³)	2.831685 E-02
cubic inch (in³)	cubic meter (m³)	1.638706 E-05
cubic mile (mi³)	cubic meter (m³)	4.168182 E+09
cubic yard (yd³)	cubic meter (m³)	7.645549 E-01
cup (U.S.)	cubic meter (m³)	2.365882 E-04
cup (U.S.)	liter (L)	2.365882 E-01
cup (U.S.)	milliliter (mL)	2.365882 E+02
fluid ounce (U.S.) (fl oz)	cubic meter (m³)	2.957353 E-05
fluid ounce (U.S.) (fl oz)	milliliter (mL)	2.957353 E+01
gallon [Canadian and U.K. (Imperial)] (gal)	cubic meter (m³)	4.54609 E-03
gallon [Canadian and U.K. (Imperial)] (gal)	liter (L)	4.54609
gallon (U.S.) (gal)	cubic meter (m³)	3.785412 E-03
gallon (U.S.) (gal)	liter (L)	3.785412
gill [Canadian and U.K. (Imperial)] (gi)	cubic meter (m³)	1.420653 E-04
gill [Canadian and U.K. (Imperial)] (gi)	liter (L)	1.420653 E-01

gill (U.S.) (gi)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	1.182941 E-04
gill (U.S.) (gi)	liter (L)	1.182941 E-01
liter (L)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	1.0 E-03
ounce [Canadian and U.K. fluid (Imperial)] (fl oz)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	2.841306 E-05
ounce [Canadian and U.K. fluid (Imperial)] (fl oz)	milliliter (mL)	2.841306 E+01
ounce (U.S. fluid) (fl oz)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	2.957353 E-05
ounce (U.S. fluid) (fl oz)	milliliter (mL)	2.957353 E+01
peck (U.S.) (pk)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	8.809768 E-03
peck (U.S.) (pk)	liter (L)	8.809768
pint (U.S. dry) (dry pt)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	5.506105 E-04
pint (U.S. dry) (dry pt)	liter (L)	5.506105 E-01
pint (U.S. liquid) (liq pt)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	4.731765 E-04
pint (U.S. liquid) (liq pt)	liter (L)	4.731765 E-01
quart (U.S. dry) (dry qt)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	1.101221 E-03
quart (U.S. dry) (dry qt)	liter (L)	1.101221
quart (U.S. liquid) (liq qt)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	9.463529 E-04
quart (U.S. liquid) (liq qt)	liter (L)	9.463529 E-01
stere (st)	cubic meter (m <sup>3</sup> )	1.0
tablespoon	cubic meter (m <sup>3</sup> )	1.478676 E-05
tablespoon	milliliter (mL)	1.478676 E+01
teaspoon	cubic meter (m <sup>3</sup> )	4.928922 E-06
teaspoon	milliliter (mL)	4.928922
ton, register	cubic meter (m <sup>3</sup> )	2.831685
cubic foot per minute (ft <sup>3</sup> /min)	cubic meter per second (m <sup>3</sup> /s)	4.719474 E-04
cubic foot per minute (ft <sup>3</sup> /min)	liter per second (L/s)	4.719474 E-01
cubic foot per second (ft <sup>3</sup> /s)	cubic meter per second (m <sup>3</sup> /s)	2.831685 E-02
cubic inch per minute (in <sup>3</sup> /min)	cubic meter per second (m <sup>3</sup> /s)	2.731177 E-07
cubic yard per minute (yd <sup>3</sup> /min)	cubic meter per second (m <sup>3</sup> /s)	1.274258 E-02
gallon (U.S.) per day (gal/d)	cubic meter per second (m <sup>3</sup> /s)	4.381264 E-08
gallon (U.S.) per day (gal/d)	liter per second (L/s)	4.381264 E-05
gallon (U.S.) per minute (gpm) (gal/min)	cubic meter per second (m <sup>3</sup> /s)	6.309020 E-05
gallon (U.S.) per minute (gpm) (gal/min)	liter per second (L/s)	6.309020 E-02



## Unità di misura del Volume (U.S.)

	pollici <sup>3</sup>	piedi <sup>3</sup>	yards <sup>3</sup>	centi metri <sup>3</sup>	deci metri <sup>3</sup>	metri <sup>3</sup>
pollice <sup>3</sup>	1	0.000578704	0.000021433	16.387162	0.016387	0.000016
piede <sup>3</sup>	1728	1	0.037037	28317.016	28.317016	0.028317
yard <sup>3</sup>	46656	27	1	764559.4	764.5594	0.764559
centi metro <sup>3</sup>	0.06102338	.00003531445	0.000001307	1	0.001	0.000001
deci metro <sup>3</sup>	61.02338	0.03531445	0.001307943	1000	1	0.001
metro <sup>3</sup>	61023.38	35.31445	1.3079428	1000000	1000	1

pollice cubo (cu in.)

centimetro cubo (cm<sup>3</sup>)

piede cubo (cu ft.)

decimetro cubo (dm<sup>3</sup>)

yard cubo (cu yd)

metro cubo (m<sup>3</sup>)

## Elenco grandezze riferite ad 1 metro cubo

acre-foot = 1.23348*10 <sup>-3</sup>	kilderkin (kil) = 81.8296*10 <sup>-3</sup>
anker (ank) = 45.4609*10 <sup>-3</sup>	minim (UK) (min) = 58.1939*10 <sup>-9</sup>
barrel = 0.158987	once fluid (UK)(fl. oz) = 28.4131*10 <sup>-6</sup>
barrel (dry US) (bbl) = 0.115628	peck (UK) (pk) = 9.09218*10 <sup>-3</sup>
board foot (fbm) = 2.35973*10 <sup>-3</sup>	pint (UK) (pt) = 0.56286*10 <sup>-3</sup>
bucket (UK dry) = 181.818*10 <sup>-3</sup>	pottle = 2.27304*10 <sup>-3</sup>
bushel (UK) (bu) = 36.3687*10 <sup>-3</sup>	puncheon (punch) = 0.32732
butt = 0.49098	quart (UK) (qt) = 1.1365*10 <sup>-3</sup>
chaldron = 1.30927	quarter = 0.29095
cord (cd) = 3.62455	raummeter (Rm) = 1
cran = 170.5*10 <sup>-3</sup>	runlet (run) = 81.8296*10 <sup>-3</sup>
cup = 2.36588*10 <sup>-4</sup>	scruple fluid = 1.18388*10 <sup>-6</sup>
drachm (UK fluid) = 3.5516*10 <sup>-6</sup>	stack = 3.058214
fathom (of wood) = 6.116428	stero (st s) = 1
festmeter (Fm) = 1	tablespoon = 1.47867*10 <sup>-5</sup>
firkin (beer) (fir) = 40.9148*10 <sup>-3</sup>	teaspoon = 4.92892*10 <sup>-6</sup>
gallon (UK liquid)(imp. gal) = 4.54608*10 <sup>-3</sup>	tierce = 0.19093
gallon (Canada liquid) = 4.54612*10 <sup>-3</sup>	ton register = 2.83168
gallon (US dry) = 4.40488*10 <sup>-3</sup>	ton US shipping = 1.1328
gill (UK) (gi) = 1.42065*10 <sup>-4</sup>	ton UK shipping = 1.1894
gill (US) = 1.18294*10 <sup>-4</sup>	tun = 1.1456
hogshead (hhd) = 0.286795	vedro = 12.299*10 <sup>-3</sup>
	votchka = 0.49196

### Concentrazione delle soluzioni

**percentuale in peso:** indicante la massa di soluto (in g) contenuta in 100 g di soluzione;  
**percentuale in volume:** indicante il volume di soluto (liquido o gas), in  $\text{cm}^3$  contenuto in 100  $\text{cm}^3$  di solvente;  
**percentuale in peso di soluto per volume di soluzione:** indicante la massa di soluto (in g) contenuta in 100  $\text{cm}^3$  di soluzione;  
**molarità (M):** indicante il numero di moli di soluto disciolte in 1  $\text{dm}^3$  di soluzione;  
**molalità (m):** indicante il numero di moli di soluto disciolte in 1000 g di solvente puro;  
**frazione molare:** esprime il rapporto tra numero di moli del componente e le moli totali della soluzione;  
**normalità:** numero di grammi equivalenti (peso equivalente) per litro di soluzione;  
**KATAL:** esprime la quantità di catalizzatore trasformato in 1 sec. da cui il katal = 1 mole/secondo. (1 kat = 1 mol/s);

**ppm:** parts per million (parti su milione) <sup>(\*)</sup>  
**ppb:** parts per billion (parti su miliardo)  
**pphm:** parts per hundred millions (parti su 100 milioni)  
**ppt:** parts per trillion (parti su trilione)

**Il bilione** secondo l'uso contemporaneo francese e statunitense è pari ad un miliardo, mentre nell'uso italiano antico e contemporaneo tedesco ed inglese risulta pari a un milione di milioni (1000 miliardi).

**Il trilione** secondo l'uso contemporaneo italiano, francese e statunitense è pari a mille miliardi, mentre secondo l'uso italiano antico e contemporaneo tedesco ed inglese, corrisponde a un miliardo di miliardi.

(\*) è sempre usata con unità omogenee. Per i gas =  $\text{cm}^3/\text{m}^3$ , per le soluzioni = mg/Kg, oppure g/t, che per le soluzioni acquose praticamente equivalgono, date le piccolissime concentrazioni, a mg/l oppure  $\text{g}/\text{m}^3$

## J.7 Angoli

### Equivalenze unità Angolari

gradi	primi	secondi	mill. esatti	mill. convenzionali	gradi cent.
1	60	3600	17.45329	17.77777	1.11111
0.01667	1	60	0.29089	0.29630	0.01852
0.00028	0.01667	1	0.00485	0.00494	0.00031
0.05730	3.43775	206.26482	1	1.01859	0.06366
0.05625	3.37500	202.50000	0.98175	1	0.06250
0.90000	54	3240	15.70796	16	1

1 grado = 0.017453293 radianti  
 1 primo = 0.000290888 radianti  
 1 secondo = 0.000004848 radianti

### valori di $\pi$

$\pi$  rappresenta il rapporto fra la circonferenza e il diametro di uno stesso cerchio.

$$\pi = 3.1415926535897932384626434$$

$$1/\pi = 0.3183098861837906715377675$$

$$\pi^2 = 9.8696044011$$

$$\pi^3 = 31.0062766803$$

$$\text{radice}^2 \pi = 1.77245385509$$

$$\text{radice}^3 \pi = 1.4645918876$$

Il rapporto costante tra l'area di un cerchio e il quadrato del suo raggio, era già a conoscenza di Babilonesi ed Egizi, ma il valore di tale costante era incerto. Il greco Archimede (287-212 a.C.) fu il primo ad esporre un procedimento per calcolare il valore di  $\pi$ , stabilendo che l'area dei poligoni regolari inscritti nel cerchio di area unitaria tende all'area del cerchio stesso via via che aumentano i lati del poligono. Lo svizzero Eulero (1707-83) dimostrò che:

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4. \text{ In seguito l'inglese J. Wallis (1616-1703) enunciò l'uguaglianza: } 2/1 \cdot 2/3 \cdot 4/3 \cdot 4/5 \cdot 6/5 \cdot 6/7 \cdot \dots = \pi/2.$$

radianti (r)	gradi cent. (gr)	gradi sessagesimali ( $^{\circ} = '' ''$ )
1	63.6619772	57.2957795 = 571744.81
0.0157080	1	0.9 = 0.54
0.0174533	1.1111111	1

### Definizioni riferite ad 1 rad

angolo giro = $2 \pi$	linea (artiglieria) (-) = $\pi/3200$
dez = 0.174533	millesimo = $10^{-3}$
gon (g) = 0.015708	millesimo convenzionale ( $^{\circ}$ ) = $\pi/3200$
grado ( $^{\circ}$ ) = 0.17453	minuto d'angolo ( $'$ ) = $2.908882 \cdot 10^{-4}$
linea marina = $\pi/16$	secondo d'angolo ( $''$ ) = $4.848137 \cdot 10^{-6}$

## J.8 Velocità

### Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
foot per hour (ft/h)	metri al secondo (m/s)	8.466667 E-05
foot per minute (ft/min)	metri al secondo (m/s)	5.08 E-03
foot per second (ft/s)	metri al secondo (m/s)	3.048 E-01
inch per second (in/s)	metri al secondo (m/s)	2.54 E-02
chilometri all'ora (km/h)	metri al secondo (m/s)	2.777778 E-01
knot (nautical mile per hour)	metri al secondo (m/s)	5.144444 E-01
mile per hour (mi/h)	metri al secondo (m/s)	4.4704 E-01
mile per hour (mi/h)	chilometri all'ora (km/h)	1.609344
mile per minute (mi/min)	metri al secondo (m/s)	2.68224 E+01
mile per second (mi/s)	metri al secondo (m/s)	1.609344 E+03
revolution per minute (rpm) (r/min)	radianti al secondo (rad/s)	1.047198 E-01
rpm (revolution per minute) (r/min)	radianti al secondo (rad/s)	1.047198 E-01

## J.9 Forza

## Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
dyne (dyn)	newton (N)	1.0 E-05
kilogram-force (kgf)	newton (N)	9.80665
kilopond (kilogram-force) (kp)	newton (N)	9.80665
kip (1 kip=1000 lbf)	newton (N)	4.448222 E+03
kip (1 kip=1000 lbf)	kilonewton (kN)	4.448222
ounce (avoirdupois)-force (ozf)	newton (N)	2.780139 E-01
poundal	newton (N)	1.382550 E-01
pound-force (lbf)	newton (N)	4.448222
pound-force per pound (lbf/lb) (thrust to mass ratio)	newton per kilogram (N/kg)	9.80665
ton-force (2000 lbf)	newton (N)	8.896443 E+03
ton-force (2000 lbf)	kilonewton (kN)	8.896443
pound-force per foot (lbf/ft)	newton per meter (N/m)	1.459390 E+01
pound-force per inch (lbf/in)	newton per meter (N/m)	1.751268 E+02



## J.10 Pressione

## Unità di misura della Pressione

	Pa N/m <sup>2</sup>	bar	mbar	μbar dyn/cm <sup>2</sup>	Torr mm Hg	micron μ, m Torr	atm	at	mm Ws	psi lbf/inch <sup>2</sup>	psf lbf/ft <sup>2</sup>
Pa	1	1*10 <sup>-5</sup>	1*10 <sup>-2</sup>	10	7.5*10 <sup>-3</sup>	7.5	9.87*10 <sup>-6</sup>	1.02*10 <sup>-5</sup>	0.102	1.45*10 <sup>-4</sup>	2.09*10 <sup>-2</sup>
bar	1*10 <sup>5</sup>	1	1*10 <sup>3</sup>	1*10 <sup>6</sup>	750	7.5*10 <sup>5</sup>	0.987	1.02	1.02*10 <sup>4</sup>	14.5	2.09*10 <sup>3</sup>
mbar	100	1*10 <sup>-3</sup>	1	1000	0.75	750	9.87*10 <sup>-4</sup>	1.02*10 <sup>-3</sup>	10.2	1.45*10 <sup>-2</sup>	2.09
μbar	0.1	1*10 <sup>-6</sup>	1*10 <sup>-3</sup>	1	7.5*10 <sup>-4</sup>	0.75	9.87*10 <sup>-7</sup>	1.02*10 <sup>-6</sup>	1.02*10 <sup>-2</sup>	1.45*10 <sup>-5</sup>	2.09*10 <sup>-3</sup>
Torr	1.33*10 <sup>2</sup>	1.33*10 <sup>-3</sup>	1.33	1330	1	1000	1.32*10 <sup>-3</sup>	1.36*10 <sup>-3</sup>	13.6	1.93*10 <sup>-2</sup>	2.78
micron	0.133	1.33*10 <sup>-6</sup>	1.33*10 <sup>-3</sup>	1.33	1*10 <sup>-3</sup>	1	1.32*10 <sup>-6</sup>	1.36*10 <sup>-6</sup>	1.36*10 <sup>-2</sup>	1.93*10 <sup>-5</sup>	2.78*10 <sup>-3</sup>
atm	1.01*10 <sup>5</sup>	1.013	1013	1.01*10 <sup>6</sup>	760	7.6*10 <sup>5</sup>	1	1.03	1.03*10 <sup>4</sup>	14.7	2.12*10 <sup>3</sup>
at	9.81*10 <sup>4</sup>	0.981	981	9.81*10 <sup>5</sup>	735.6	7.36*10 <sup>5</sup>	0.968	1	1*10 <sup>4</sup>	14.2	2.04*10 <sup>3</sup>
mmWs	9.81	9.81*10 <sup>-5</sup>	9.81*10 <sup>-2</sup>	98.1	7.36*10 <sup>-2</sup>	73.6	9.68*10 <sup>-5</sup>	1*10 <sup>-4</sup>	1	1.42*10 <sup>-3</sup>	0.204
psi	6.89*10 <sup>3</sup>	6.89*10 <sup>-2</sup>	68.9	6.89*10 <sup>4</sup>	51.71	5.17*10 <sup>4</sup>	6.8*10 <sup>-2</sup>	7.02*10 <sup>-2</sup>	702	1	144
psf	47.8	4.78*10 <sup>-4</sup>	0.478	478	0.359	359	4.72*10 <sup>-4</sup>	4.87*10 <sup>-4</sup>	4.87	6.94*10 <sup>-3</sup>	1

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della pressione è il newton su metro quadrato (N/m<sup>2</sup>) definita **pascal** (Pa). Per convenzione si definisce atmosfera la pressione esercitata a livello del mare da una colonna di mercurio alta 760 mm (1 atm = 101 325 Pa).

## Definizioni di uso comune rapportate all'unità 1 Pa

atmosfera fisica (atm) = 101.325*10 <sup>3</sup>	m. d'acqua (m <sub>H2O</sub> ) = 9.80665*10 <sup>3</sup>
atmosfera tecnica (at) = 98.0665*10 <sup>3</sup>	micron (μm <sub>Hg</sub> ) = 0.133322
baria = 0.1	pieze (pz) = 10 <sup>3</sup>
cm. di mercurio (a 0°C)(cm <sub>Hg</sub> ) = 1333.32	psi = 6.894757*10 <sup>3</sup>
cm. d'acqua (a 4°C)(cm <sub>H2O</sub> ) = 98.0638	

## Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
atmosphere, standard (atm)	pascal (Pa)	1.01325 E+05
atmosphere, standard (atm)	kilopascal (kPa)	1.01325 E+02
atmosphere, technical (at)	pascal (Pa)	9.80665 E+04
atmosphere, technical (at)	kilopascal (kPa)	9.80665 E+01
bar (bar)	pascal (Pa)	1.0 E+05
bar (bar)	kilopascal (kPa)	1.0 E+02
centimeter of mercury (0 °C)	pascal (Pa)	1.33322 E+03
centimeter of mercury (0 °C)	kilopascal (kPa)	1.33322
centimeter of mercury, conventional (cmHg)	pascal (Pa)	1.333224 E+03
centimeter of mercury, conventional (cmHg)	kilopascal (kPa)	1.333224
centimeter of water (4 °C)	pascal (Pa)	9.80638 E+01
centimeter of water, conventional (cmH <sub>2</sub> O)	pascal (Pa)	9.80665 E+01
dyne per square centimeter (dyn/cm <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	1.0 E-01
foot of mercury, conventional (ftHg)	pascal (Pa)	4.063666 E+04
foot of mercury, conventional (ftHg)	kilopascal (kPa)	4.063666 E+01
foot of water (39.2 °F)	pascal (Pa)	2.98898 E+03
foot of water (39.2 °F)	kilopascal (kPa)	2.98898
foot of water, conventional (ftH <sub>2</sub> O)	pascal (Pa)	2.989067 E+03
foot of water, conventional (ftH <sub>2</sub> O)	kilopascal (kPa)	2.989067
gram-force per square centimeter (gf/cm <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	9.80665 E+01
inch of mercury (32 °F)	pascal (Pa)	3.38638 E+03
inch of mercury (32 °F)	kilopascal (kPa)	3.38638
inch of mercury (60 °F)	pascal (Pa)	3.37685 E+03
inch of mercury (60 °F)	kilopascal (kPa)	3.37685
inch of mercury, conventional (inHg)	pascal (Pa)	3.386389 E+03
inch of mercury, conventional (inHg)	kilopascal (kPa)	3.386389
inch of water (39.2 °F)	pascal (Pa)	2.49082 E+02
inch of water (60 °F)	pascal (Pa)	2.4884 E+02
inch of water, conventional (inH <sub>2</sub> O)	pascal (Pa)	2.490889 E+02
kilogram-force per square centimeter (kgf/cm <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	9.80665 E+04
kilogram-force per square centimeter (kgf/cm <sup>2</sup> )	kilopascal (kPa)	9.80665 E+01
kilogram-force per square meter (kgf/m <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	9.80665
kilogram-force per square millimeter (kgf/mm <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	9.80665 E+06
kilogram-force per square millimeter (kgf/mm <sup>2</sup> )	megapascal (MPa)	9.80665
kip per square inch (ksi) (kip/in <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	6.894757 E+06
kip per square inch (ksi) (kip/in <sup>2</sup> )	kilopascal (kPa)	6.894757 E+03
millibar (mbar)	pascal (Pa)	1.0 E+02
millibar (mbar)	kilopascal (kPa)	1.0 E-01
millimeter of mercury, conventional (mmHg)	pascal (Pa)	1.333224 E+02
millimeter of water, conventional (mmH <sub>2</sub> O)	pascal (Pa)	9.80665
poundal per square foot	pascal (Pa)	1.488164
pound-force per square foot (lbf/ft <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	4.788026 E+01
pound-force per square inch (psi) (lbf/in <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	6.894757 E+03
pound-force per square inch (psi) (lbf/in <sup>2</sup> )	kilopascal (kPa)	6.894757
psi (pound-force per square inch) (lbf/in <sup>2</sup> )	pascal (Pa)	6.894757 E+03
psi (pound-force per square inch) (lbf/in <sup>2</sup> )	kilopascal (kPa)	6.894757
torr (Torr)	pascal (Pa)	1.333224 E+02

## J.11 Potenza

### Unità di misura della Potenza

<b>kilogrammi forza-Newton e Newton-kilogrammi forza (UNI 7202-73)</b>	
<b>1 kgf = 9.80665 kg*m/s<sup>2</sup> = 9.80665 N</b>	<b>1 N = 1/9.80665 kgf = 0.101971621 kgf</b>
<b>calorie-joule e joule-calorie (UNI 7203-73)</b>	
<b>1 cal = 41868 W*s = 4.1868 J</b>	<b>1 J = 1 W*s = 1/41868 cal = 0.2388459 cal</b>
<b>cavalli-kilowatt e kilowatt-cavalli (UNI 7204-73)</b>	
<b>1 CV = 75 kgf*m/s = 75 * 9.80665 N*m/s = 0.73549875 kW</b>	
<b>1 kW = 1/0.73549875 CV = 1.359621617 CV</b>	
<b>kilocalorie ora-watt e watt-kilocalorie ora (UNI 7205-73)</b>	
<b>1 kcal/h = 4186.8/3600 W = 1.163 W</b>	<b>1 W = 1/1.163 kcal/h = 0.85984523 kcal/h</b>

1 watt = 1 joule/secondo.  
Un watt corrisponde alla potenza necessaria per sollevare di 1 metro un corpo avente massa di 102 grammi in 1 secondo.

1 kW = 0.7457 HP	1 HP = 1.4102 kW
1 CV = 1.01387 HP	1 HP = 0.9863 CV
1 chilogrammetro = 0.138 foot pound	1 foot pound = 7.233 chilogrammetri

### altre definizioni riferite ad 1 watt

cavallo vapore (CV) = 735.49875	lusec = 133.332*10 <sup>-6</sup>
cheval vapeur électrique (ch <sub>e</sub> ) = 736	poncelet (p) = 980.665
horsepower (HP) = 754.6999	watt internazionale (1948) = 1.000165
horsepower UK (HP) = 745.7	
horsepower boiler = 9.8095*10 <sup>3</sup>	
horsepower electric = 746	
horsepower water = 746.043	

### Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
erg per second (erg/s)	watt (W)	1.0 E-07
foot pound-force per hour (ft*lb/h)	watt (W)	3.766161 E-04
foot pound-force per minute (ft*lb/min)	watt (W)	2.259697 E-02
foot pound-force per second (ft*lb/s)	watt (W)	1.355818
horsepower (550 ft*lb/s)	watt (W)	7.456999 E+02
horsepower (boiler)	watt (W)	9.80950 E+03
horsepower (electric)	watt (W)	7.46 E+02
horsepower (metric)	watt (W)	7.354988 E+02
horsepower (U.K.)	watt (W)	7.4570 E+02
horsepower (water)	watt (W)	7.46043 E+02



## J.12 Energia

## Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
British thermal unit <sub>IT</sub> (Btu <sub>IT</sub> )	joule (J)	1.055056 E+03
British thermal unit <sub>5</sub> (Btu <sub>5</sub> )	joule (J)	1.054350 E+03
British thermal unit (mean) (Btu)	joule (J)	1.05587 E+03
British thermal unit (39 °F) (Btu)	joule (J)	1.05967 E+03
British thermal unit (59 °F) (Btu)	joule (J)	1.05480 E+03
British thermal unit (60 °F) (Btu)	joule (J)	1.05468 E+03
calorie <sub>IT</sub> (cal <sub>IT</sub> )	joule (J)	4.1868
calorie <sub>5</sub> (cal <sub>5</sub> )	joule (J)	4.184
calorie (mean) (cal)	joule (J)	4.19002
calorie (15 °C) (cal15)	joule (J)	4.18580
calorie (20 °C) (cal20)	joule (J)	4.18190
calorie <sub>IT</sub> , kilogram (nutrition)	joule (J)	4.1868 E+03
calorie <sub>5</sub> , kilogram (nutrition)	joule (J)	4.184 E+03
calorie (mean), kilogram (nutrition)	joule (J)	4.19002 E+03
cavallo secondo (CVs)	joule (J)	735.5
cavallo ora (CVh)	joule (J)	2.6478 E+6
chilogrammetro (kgm)	joule (J)	9.80665
electronvolt (eV)	joule (J)	1.602177 E-19
erg (erg)	joule (J)	1.0 E-07
foot poundal	joule (J)	4.214011 E-02
foot pound-force (ft * lbf)	joule (J)	1.355818
kilocalorie <sub>IT</sub> (kcal <sub>IT</sub> )	joule (J)	4.1868 E+03
kilocalorie <sub>5</sub> (kcal <sub>5</sub> )	joule (J)	4.184 E+03
kilocalorie (mean) (kcal)	joule (J)	4.19002 E+03
kilowatt hour (kW*h)	joule (J)	3.6 E+06
kilowatt hour (kW*h)	megajoule(MJ)	3.6
kilowatt hour (kW*h)	kcal	860
quad (10 <sup>15</sup> Btu <sub>IT</sub> )	joule (J)	1.055056 E+18
tep (tonnellate equivalenti di petrolio)	kcal	1.0 E+7
tep (tonnellate equivalenti di petrolio)	kWh	11.628 E+3
therm (EC)	joule (J)	1.05506 E+08
therm (U.S.)	joule (J)	1.054804 E+08
ton of TNT (energy equivalent)	joule (J)	4.184 E+09
watt hour (W*h)	joule (J)	3.6 E+03
watt second (W*s)	joule (J)	1.0
erg per square centimeter second	watt per square meter (W/m <sup>2</sup> )	1.0 E-03
watt per square centimeter (W/cm <sup>2</sup> )	watt per square meter (W/m <sup>2</sup> )	1.0 E+04
watt per square inch (W/in <sup>2</sup> )	watt per square meter (W/m <sup>2</sup> )	1.550003 E+03

## J.13 Temperatura

### Unità di misura della Temperatura

L'unità di temperatura più usata è il grado centigrado o grado Celsius proposto dall'astronomo svedese A. Celsius (1701 - 1744). Il grado è la centesima parte della scala termometrica, ottenuta fissando a 0° C la temperatura del ghiaccio fondente e a 100° quella dell'acqua bollente. Oltre la scala Celsius esistono altre due scale, la **Réaumur** usata in Francia, e la scala **Fahrenheit** utilizzata nei paesi anglosassoni.

corrispondenze:

- CELSIUS    0 °C 100 °C
- REAUMUR   0 °R 80 °R
- FAHRENHEIT   32 °F 212 °F

**Ad ogni grado centigrado corrispondono 0.8 °R e 1.8 °F**

$$1\text{ °C} = 1\text{ K}$$

$$1\text{ °F} = 5/9\text{ K}$$

$$1\text{ Rankine (°R °Rank)} = 5/9\text{ K}$$

**Per convertire da °C a °F moltiplicare per 9, dividere il risultato per 5 ed aggiungere 32.**

**Per convertire da °F a °C sottrarre 32, moltiplicare il risultato per 5 e dividere per 9.**

### Scala Kelvin

Lo zero assoluto è stato utilizzato per la determinazione di una scala di temperatura conosciuta come scala Kelvin. Lo zero assoluto - 273.15° rappresenta il limite inferiore, mentre un'altro punto fisso è costituito dal punto triplo dell'acqua. Tale punto è determinato dalla coesistenza dei tre stati dell'acqua, quali: ghiaccio, liquido e vapore; esso si trova a 0.01 ° C, e corrisponde a 273.16° Kelvin. La scala fu creata da lord **William Thomson Kelvin** (1824-1907) un matematico e fisico irlandese. La scoperta dello zero assoluto risale al 1702 ad opera di un fisico francese, tale Guillaume Amontons. Naturalmente il ragionamento che portò il fisico ad una simile intuizione fu puramente teorico, vista la scarsa tecnologia disponibile all'epoca. In natura la minima temperatura riscontrabile è -273° C, rilevabile negli spazi intergalattici, definita anche come temperatura di fondo dell'Universo.

Da notare che a tale temperatura manca il "virgola 15". Infatti se si considera il calore come movimento molecolare, ne possiamo quindi sottrarre tanto a tal punto da rallentare notevolmente questa agitazione, ma è assolutamente impossibile fermarla. Ciò sarebbe contrario al Terzo Principio della Termodinamica che appunto afferma che un sistema non può perdere completamente l'energia posseduta.

### Unità di misura del Calore

Il calore nel **Sistema Internazionale**, in quanto forma di energia, viene misurato in joule (J). E' stata, e molto spesso ancora utilizza, come unità di misura, la caloria (cal), a suo tempo definita come la quantità di calore necessaria a portare la temperatura di 1 g di acqua distillata da 14.5 °C a 15.5 °C, a pressione standard. Secondo la misurazione effettuata dal fisico inglese J. Joule (1818-89), 1 cal equivale a 4.1855 J. La caloria e la kilocaloria (kcal) sono largamente considerate per esprimere il contenuto energetico degli alimenti.

## Scala internazionale delle temperature (ITS 90)

sostanza	punto fisso	temperatura (K)
elio	ebollizione	3 - 5
idrogeno	punto triplo	13.8033
idrogeno	ebollizione	17
neon	punto triplo	24.5561
ossigeno	punto triplo	54.3584
argon	punto triplo	83.3058
mercurio	punto triplo	234.3156
acqua	punto triplo	273.16
gallio	fusione	302.9146
indio	fusione	492.7485
stagno	fusione	505.078
zinco	fusione	692.677
alluminio	fusione	933.473
argento	fusione	1234.93
oro	fusione	1337.33
rame	fusione	1357.77

## Grandezze riferite ad 1 Joule

BTU internazionale 1956 = 1055.056	elettronvolt (eV) = $1.6021892 \cdot 10^{-19}$
BTU media = 1055.87	erg = $1 \cdot 10^{-7}$
BTU a 39 °F = 1059.67	frigoria (fr fg) = $4.1855 \cdot 10^3$
BTU a 60 °F = 1054.68	grande caloria (Cal, kcal) = $4.1868 \cdot 10^3$
BTU termochimica = 1054.35	joule internazionale 1948 = 1.000165
caloria internazionale (cal) = 4.1868	termia (th) = $4.1855 \cdot 10^6$
caloria media = 4.19002	therm = $1.055056 \cdot 10^8$
caloria termochimica = 4.184	ton di TNT (T) = $4.2 \cdot 10^9$
caloria a 15 °C = 4.1855	tonnellata equiv. petrolio (tep) = $4.1868 \cdot 10^{10}$
caloria a 20 °C = 4.18190	wattora (Wh) = $3.6 \cdot 10^3$
cavallo-ora (CVh) = $2.64779 \cdot 10^6$	
centigrade heat unit (CHU) = 1.8991	

BTU: **Unità Termica Britannica**, equivalente alla quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di una libbra di acqua pura da 60 a 61 °F, ed è pari a 1054.5 Joule.

BTU<sub>IT</sub>: **Btu internazionale**, è stata introdotta per far coincidere i valori espressi in kcal/kg e in Btu/lb °F.

### Potere Calorifico

La caratteristica principale di un combustibile è il suo potere calorifico. Questo rappresenta la quantità di calore sviluppata nella reazione di combustione in condizioni standard predefinite. In genere viene misurato in kcal/kg per i solidi e liquidi, mentre per i gas si esprime con kcal/m<sup>3</sup>. Nella maggior parte dei combustibili, che contengono idrogeno, si distingue un **potere calorifico superiore** (che include il calore di condensazione del vapore d'acqua che si forma nella combustione) e un **potere calorifico inferiore** (che non considera tale calore).

#### Potere Calorifico Inferiore di alcuni combustibili (p.c.i.)

combustibile	p.c.i. (kcal/kg - kcal/m <sup>3</sup> )
legna da ardere	2500 - 4500
torba	3000 - 4500
carbone di legna	7500
lignite	4000 - 6200
litantrace	6800 - 9000
antracite	8000 - 8500
coke	7000
olio combustibile	9800
combustibile per aerei	10400
gasolio	10200
benzina per auto	10500
petrolio grezzo	10000
gas di petrolio liquefatti	11000
gas naturale	8300
gas tecnico di cokeria	4300
gas tecnico di altoforno	900



**Definizioni riferite ad 1 sr**

gon quadrato = $(\pi/200)^2$
grado quadrato = $(\pi/180)^2$
sphere = $4\pi$

**altre risoluzioni**

bits	counts	arcmins	mirads
7	128	168.75	49.087
8	256	84.375	24.544
9	512	42.188	12.272
10	1024	21.094	6.1359
11	2048	10.547	3.0680
12	4096	5.2734	1.5340
13	8192	2.6367	0.76699
14	16384	1.3184	0.38350
15	32768	0.65918	0.19175
16	65536	0.32959	0.095874
17	131072	0.16479	0.047937
18	262144	0.082397	0.023968
19	524288	0.041199	0.011984
20	1048576	0.020599	0.0059921

## J.14 Eletticità e Magnetismo

## Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
abampere	ampere (A)	1.0 E+01
abcoulomb	coulomb (C)	1.0 E+01
abfarad	farad (F)	1.0 E+09
abhenry	henry (H)	1.0 E-09
abmho	siemens (S)	1.0 E+09
abohm	ohm ( $\Omega$ )	1.0 E-09
abvolt	volt (V)	1.0 E-08
ampere hour (A*h)	coulomb (C)	3.6 E+03
biot (Bi)	ampere (A)	1.0 E+01
EMU of capacitance (abfarad)	farad (F)	1.0 E+09
EMU of current (abampere)	ampere (A)	1.0 E+01
EMU of electric potential (abvolt)	volt (V)	1.0 E-08
EMU of inductance (abhenry)	henry (H)	1.0 E-09
EMU of resistance (abohm)	ohm ( $\Omega$ )	1.0 E-09
ESU of capacitance (statfarad)	farad (F)	1.112650 E-12
ESU of current (statampere)	ampere (A)	3.335641 E-10
ESU of electric potential (statvolt)	volt (V)	2.997925 E+02
ESU of inductance (stathenry)	henry (H)	8.987552 E+11
ESU of resistance (statohm)	ohm ( $\Omega$ )	8.987552 E+11
faraday (based on carbon 12)	coulomb (C)	9.648531 E+04
franklin (Fr)	coulomb (C)	3.335641 E-10
gamma (γ)	tesla (T)	1.0 E-09
gauss (Gs, G)	tesla (T)	1.0 E-04
gilbert (Gi)	ampere (A)	7.957747 E-01
maxwell (Mx)	weber (Wb)	1.0 E-08
mho	siemens (S)	1.0
oersted (Oe)	ampere per meter (A/m)	7.957747 E+01
ohm centimeter ( $\Omega$ *cm)	ohmmeter ( $\Omega$ *m)	1.0 E-02
ohm circular-mil per foot	ohmmeter ( $\Omega$ *m)	1.662426 E-09
ohm circular-mil per foot	ohmsquare millimeter per meter( $\Omega$ *mm <sup>2</sup> /m)	1.662426 E-03
statampere	ampere (A)	3.335641 E-10
statcoulomb	coulomb (C)	3.335641 E-10
statfarad	farad (F)	1.112650 E-12
stathenry	henry (H)	8.987552 E+11
statmho	siemens (S)	1.112650 E-12
statohm	ohm ( $\Omega$ )	8.987552 E+11
statvolt	volt (V)	2.997925 E+02
unit pole	weber (Wb)	1.256637 E-07

## J.15 Onde Elettromagnetiche

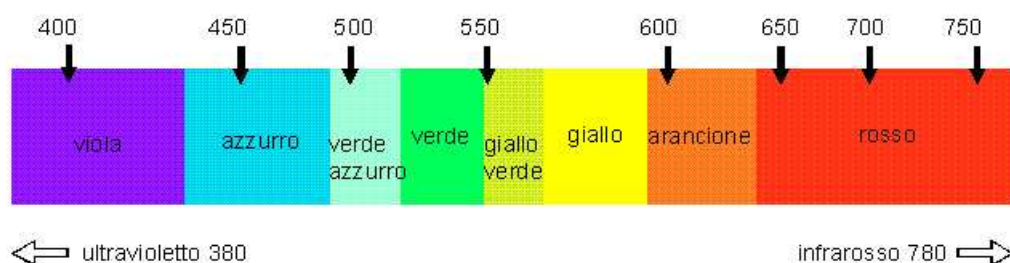
### Frequenze e lunghezze d'onda

frequenza	lunghezza	energia ( eV )	denominazione
da <30 hz a 3 khz	da >10 000 km a 100 km	a $10^{-11}$	energia elettrica e telefonia
da 3 khz a 30 khz	da 100 km a 10 km	da $10^{-11}$ a $10^{-10}$	VLF
da 30 khz a 300 khz	da 10 km a 1 km	da $10^{-10}$ a $10^{-9}$	LF
da 300 khz a 3 Mhz	da 1 km a 100 m	da $10^{-9}$ a $10^{-8}$	MF
da 3 Mhz a 30 Mhz	da 100 m a 10 m	da $10^{-8}$ a $10^{-7}$	HF
da 30 Mhz a 300 Mhz	da 10 m a 1 m	da $10^{-7}$ a $10^{-6}$	VHF
da 300 Mhz a 3 Ghz	da 1 m a 100 mm	da $10^{-6}$ a $10^{-5}$	microonde UHF
da 3 Ghz a 30 Ghz	da 100 mm a 10 mm	da $10^{-5}$ a $10^{-4}$	microonde SHF
da 30 Ghz a 300 Ghz	da 10 mm a 1 mm	da $10^{-4}$ a $10^{-3}$	microonde EHF
da 300 Ghz a $4 \cdot 10^{14}$ hz	da 1 mm a 750 nm	da $10^{-3}$ a 1.5	infrarosso
da $4 \cdot 10^{14}$ hz a $8.5 \cdot 10^{14}$ hz	da 750 nm a 350 nm	da 1.5 a 3.5	luce visibile
da $8.5 \cdot 10^{14}$ hz a $3 \cdot 10^{16}$ hz	da 350 nm a 10 nm	da 3.5 a $10^2$	ultravioletto
da $3 \cdot 10^{16}$ hz a $3 \cdot 10^{19}$ hz	da 10 nm a $10^{-2}$ nm	da $10^2$ a $10^5$	raggi X
da $3 \cdot 10^{19}$ hz a $3 \cdot 10^{22}$ hz	da $10^{-2}$ nm a $10^{-5}$ nm	da $10^5$ a $10^8$	raggi $\gamma$
da $3 \cdot 10^{22}$ hz a $3 \cdot 10^{23}$ hz	da $10^{-5}$ nm a $10^{-6}$ nm	da $10^8$ a $10^9$	radiazioni cosmiche

### Radiofrequenze più utilizzate

<u>LF: low frequency.</u> onde lunghe o chilometriche	speciali applicazioni
<u>MF: medium frequency.</u> onde medie o ettometriche	radiodiffusione a modulazione d'ampiezza e radiofari
<u>HF: high frequency.</u> onde corte o decametriche	comunicazioni a grandissime distanze
<u>VHF: very high frequency.</u> onde ultracorte o metriche	televisione, radiodiffusione a modulazione di frequenza, ponti radio, radar
<u>UHF: ultra high frequency.</u> microonde o decimetriche	" " " "

### Onde elettromagnetiche visibili



- i valori numerici sono espressi in nanometri -

grandezze fotometriche

flusso luminoso (lumen, lm) = 1 lm = 1 cd*sr	$\Phi = Q/t$
intensità luminosa = 1 cd	$I = \Phi/\omega$
quantità di luce = lm*s	
luminanza (nit, nt) = 1 nt = 1 cd/m <sup>2</sup>	$L = I/S$
illuminamento (lux, lx) = 1 lux = 1 lm/m <sup>2</sup>	$E = \Phi/S$

grandezze riferite all'unità di 1 cd

candela carcel	~ 9.6
candela hefner UK	~ 0.92
candela internazionale (I. C. P.)	~ 1.02
candela Violle	~ 20

altre definizioni

apostib (asb) = 1/π nit
candle power = 12.5664 lm
footcandle = 10.76391 lux
footlambert = 3.42625 nit
lambert (L) = 3.18309*10 <sup>3</sup> nit
phot (ph) = 1*10 <sup>4</sup> lux
stib (sb) = 1*10 <sup>4</sup> nit

Conversioni

Conversioni da:	a:	moltiplicare per
candela per square inch (cd/in <sup>2</sup> )	candela per square meter (cd/m <sup>2</sup> )	1.550003 E+03
footcandle	lux (lx)	1.076 391 E+01
footlambert	candela per square meter (cd/m <sup>2</sup> )	3.426259
lambert	candela per square meter (cd/m <sup>2</sup> )	3.183099 E+03
lumen per square foot (lm/ft <sup>2</sup> )	lux (lx)	1.076391 E+01
phot (ph)	lux (lx)	1.0 E+04
stilb (sb)	candela per square meter (cd/m <sup>2</sup> )	1.0 E+04



## J.16 Multipli e sotto-multipli del S.I.

## Multipli e sottomultipli nel Sistema Internazionale

fattore di moltiplicazione	prefisso	simbolo	valore
$10^{24}$	yotta	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000
$10^{21}$	zetta	Z	1 000 000 000 000 000 000 000
$10^{18}$	exa	E	1 000 000 000 000 000 000
$10^{15}$	peta	P	1 000 000 000 000 000
$10^{12}$	tera	T	1 000 000 000 000
$10^9$	giga	G	1 000 000 000
$10^6$	mega	M	1 000 000
$10^3$	kilo	k	1 000
$10^2$	etto	h	100
$10^1$	deca	da	10
$10^{-1}$	dieci	d	0.1
$10^{-2}$	centi	c	0.01
$10^{-3}$	milli	m	0.001
$10^{-6}$	micro	$\mu$	0.000 001
$10^{-9}$	nano	n	0.000 000 001
$10^{-12}$	pico	p	0.000 000 000 001
$10^{-15}$	femto	f	0.000 000 000 000 001
$10^{-18}$	atto	a	0.000 000 000 000 000 001
$10^{-21}$	zepto	z	0.000 000 000 000 000 000 001
$10^{-24}$	yocto	y	0.000 000 000 000 000 000 000 001

In U.S. il prefisso **deca** è comunemente definito **deka**

In occasione della 11° Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) del 1960, venne adottata la prima serie dei prefissi e simboli dei multipli e sottomultipli decimali delle unità del Sistema Internazionale.

I prefissi  $10^{-15}$  e  $10^{-18}$  sono stati inseriti nel 1964 dalla 12° CGPM.

I prefissi  $10^{15}$  e  $10^{18}$  nel 1975 dalla 15° CGPM.

I prefissi  $10^{21}$ ,  $10^{24}$ , e  $10^{-24}$ , proposti nel 1990 dal CIPM, per essere poi approvati nel 1991 dalla 19° CGPM.

## Appendice K

# Costanti Fondamentali della Fisica

### Costanti Fondamentali

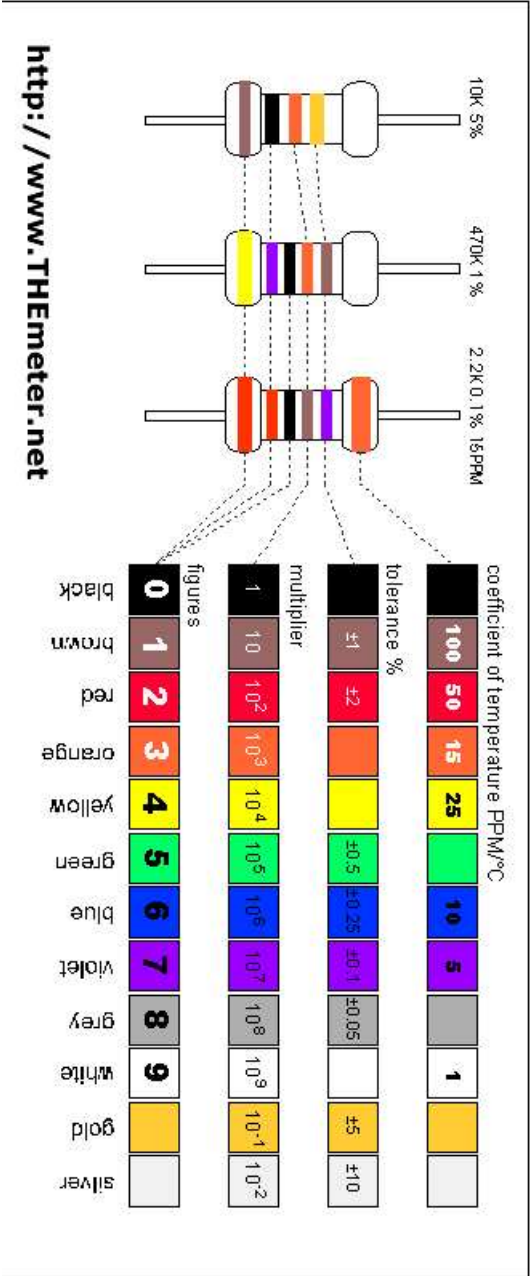
nome	simbolo	valore	unità di misura
costante di gravitazione	G	$6.670 \cdot 10^{-11}$	newton*m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
numero di Avogadro	N <sub>A</sub>	$6.02252 \cdot 10^{23}$	mol <sup>-1</sup>
costante di Faraday	F	$9.6487 \cdot 10^4$	coulomb/mole
costante di Boltzmann	k	$1.38054 \cdot 10^{-23}$	joule/K
costante dei gas perfetti	R	8.3143	joule/mole*K
velocità della luce nel vuoto	c	$2.9979246 \cdot 10^8$	m/s
carica dell'elettrone	e	$1.60219 \cdot 10^{-19}$	coulomb
costante dielettrica del vuoto	ε <sub>0</sub>	$8.8544 \cdot 10^{-12}$	coulomb <sup>2</sup> /N*m <sup>2</sup>
permeabilità magnetica del vuoto	μ <sub>0</sub>	$1.2566 \cdot 10^{-6}$	m*kg/coulomb <sup>2</sup>
massa a riposo dell'elettrone	m <sub>e</sub>	$9.1091 \cdot 10^{-31}$	kg
massa a riposo del protone	m <sub>p</sub>	$1.6725 \cdot 10^{-27}$	kg
massa a riposo del neutrone	m <sub>n</sub>	$1.6748 \cdot 10^{-27}$	kg
raggio classico dell'elettrone	r <sub>e</sub>	$2.81777 \cdot 10^{-15}$	m
costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.6697 \cdot 10^{-8}$	joule/m <sup>2</sup> *s*K
costante di Planck	h	$6.62559 \cdot 10^{-34}$	joule*s
costante di Rydberg	R <sub>∞</sub>	$1.09737 \cdot 10^7$	m <sup>-1</sup>
costante di Bohr	a <sub>0</sub>	$0.529177 \cdot 10^{-10}$	m
costante di struttura fine	α	1/137.036	-

Le costanti fondamentali rappresentano le costanti numeriche stabilite sperimentalmente, legate a processi fisici di varia natura. Si ritiene che conservino lo stesso valore in qualunque luogo e momento, da cui il nome di universali e/o fondamentali. Le c.f. inoltre non sono ricavabili per via teorica, ma solo attraverso esperimenti.



# Appendice L

## Codice dei colori dei resistori



# Considerazioni Finali

Il Prontuario è stato scritto con riferimento ai testi universitari indicati nella Bibliografia, ed ai corsi di Analisi Matematica I-II-III tenuti presso la Facoltà di Ingegneria di Pisa. Per un approfondimento dei concetti esposti, si consiglia vivamente di consultare i suddetti testi.

Stesura completata: Domenica 11 Novembre 2001

A handwritten signature in black ink. The name "Proton" is written in a cursive style with a large, ornate capital 'P'. The name "Andrea" is written in a similar cursive style. Below the signature is a long, horizontal, slightly wavy line that tapers at both ends.

# Bibliografia

- [1] *Analisi I (Lezioni)* - Alessandro Faedo & Luciano Modica - Edizioni UNICOPLI Spa (1994/95)
- [2] *Analisi Matematica 2* - Enrico Giusti - Bollati Boringhieri Editore (1995)
- [3] *Appunti di ANALISI MATEMATICA II (esposti in lingua volgare)* - Sebastiano Francaviglia - Tipografia Editrice Pisana (1997/98)
- [4] *Analisi Matematica* - Giovanni Prodi - Bollati Boringhieri Editore S.r.l. Torino
- [5] *Collana Esami - 'Integrali Curvilinei e Multipli'* - Giulio Panzarasa - Gioacchino Orecchia - Edizioni Tecnos S.r.l - Milano
- [6] *Collana Esami - 'Serie di Funzioni'* - Giulio Panzarasa - Salvatore Tribulato - Edizioni Tecnos S.r.l - Milano
- [7] *Elementi di Geometria e Algebra Lineare* - M.Martelli - E. Ripoli - Edizioni ETS
- [8] Tutte le tabelle sulle unità di misura sono state prelevate dal sito internet [www.themeter.net](http://www.themeter.net)

# Indice analitico

- $L^2(a, b)$ , 183
- 1-Forma, 120
- 2-Forma, 128
- Aggiunto, 229
- Analiticità, 169
- Arco di Curva, 38
  - Lunghezza di un arco di curva, 98
- Armoniche, 186
- Ascissa Curvilinea, 100
- Asintoti, 36
- Autovalori, 69, 232
- Autovettori, 232
- Bernoulli, 11
- Binomiale, 12
- Binomio di Newton, 12
- Cambio di Variabili, 108, 109, 115, 116
- Campo Conservativo, 123
- Campo Radiale, 123
- Campo Solenoidale, 130
- Capelli, 239
- Carnot, 17
- Catenaria, 13
- Cauchy, 77, 78, 83
- Cauchy-Riemann, 167
- Cilindro, 215
- Circonferenza, 18
- Circuitazione, 104
- Coefficienti di Fourier, 185
- Complemento Algebrico, 229
- Concavità e Convessità, 37
- Cono, 215
- Continuità, 28, 59
- Lipschitziana, 28
- Uniforme, 28
- Convergenza Assoluta, 90
- Convergenza Puntuale, 89
- Convergenza Semplice, 88, 90
- Convergenza Totale, 90, 91
- Convergenza Uniforme, 88–91
- Convoluzione, 159
- Coordinate Cilindriche, 116
- Coordinate Polari, 58, 109
- Coordinate Sferiche, 116
- Coseno Iperbolico, 13
- Costanti Arbitrarie di Lagrange, 85
- Cramer, 239
- Criterio di Leibniz, 91
- Curva Rettificabile, 99
- Curva Semplice e Regolare, 72
- Derivabilità, 60
- Derivata, 30, 61, 65
  - Rappresentazione, 30
- Derivata Parziale, 60
- Derivazione per Serie, 93
- Determinante, 227
- Differenziabilità, 64, 65
  - delle funzioni scalari, 64
  - delle funzioni vettoriali, 65
- Differenziale, 30
- Distanza, 54
  - Euclidea, 54
- Disuguaglianza Triangolare, 14
- Divergenza, 122, 125, 128
- Dominio Stellato, 131
- Ellisse, 18
- Ellissoide, 212

- Equazioni Autonome, 148
- Equazioni Differenziali, 76
  - a coeff. Costanti, 84
  - Lineari, 82
    - Omogenee, 82
  - Non Normali, 76
  - Normali, 76
    - Omogenee, 84
  - Primo Ordine, 83
- Esponenziale di Matrice, 173
- Eulero, 51
- Flusso, 124
- Frontiera, 125
- Funzione Analitica, 92, 143
- Funzione Gradino, 158
- Funzioni, 12, 35
  - Dispari, 35
  - Implicite, 72, 73
  - Inverse, 12
  - Pari, 35
  - Scalari, 53
  - Vettoriali, 53
- Gauss-Green, 125, 128
- Gauss-Jordan
  - Metodo di, 240
- Gradiente, 60
- Grafo Orientato, 235
  - Fortemente Connesso, 235
- Gronwall (Lemma di), 147
- Hurwitz, 198
- I Teorema di Cauchy, 168
- II Teorema di Cauchy, 168
- Impulso di Dirac, 158
- Insieme Connesso, 120
- Insieme Semplicemente Connesso, 123
- Instabilità, 149
- Integrale, 44, 49
  - Calcolo, 45, 49
  - e Serie, 49
  - Funzioni Razionali, 47
  - Generale, 76
  - Improprio, 48
- Integrale Curvilineo, 101
  - Calcolo, 102
  - Orientato, 102
- Integrale di Linea, 104
  - Calcolo, 104
- Integrale di Superficie, 117
  - Calcolo, 117
- Integrale Doppio, 105
  - Calcolo, 106, 107
- Integrale Generale, 82
- Integrale Triplo, 110
  - Calcolo, 111, 112, 114
- Integrazione per Serie, 92
- Intorno, 54
  - Circolare, 54
- Iperbole, 18
- Iperboloide, 213
- Jordan, 172
- Kamke, 147
- Lagrange, 40
- Laplace, 157
  - Antitrasformata di, 158
  - Trasformata di, 157
- Laurent, 169
- Limite, 24, 55, 58
  - Forme Indeterminate, 24
  - Ordine di Infinitesimo, 24
  - Ordine di Infinito, 25
- Linearizzazione, 151, 152
- Lipschitzianità, 78
- Ljapunov, 149
  - Stabilità di, 149
- Lunghezza di un arco di curva, 98, 100
- Massimi e minimi, 36, 67
- Massimo Limite, 24
- Matrice, 225
  - a Predominanza Diagonale Debole, 226



- a Predominanza Diagonale Forte, 226
- Caratteristica di una, 231
- Completa, 239
- Convergente, 232
- Definita Negativa, 233
- definita Negativa, 68
- Definita Positiva, 233
- definita Positiva, 67
- di Permutazione, 226
- Diagonale, 225
- Diagonalizzabile, 234
- Hermitiana, 226
- Hessiana, 62
- Incompleta, 239
- Inversa, 230
- Jacobiana, 61
- jacobiana delle funzioni composte, 65
- Normale, 226
- Ortagonale, 230
- Rango di una, 231
- Riducibile, 234
- Semidefinita Negativa, 233
- Semidefinita Positiva, 233
- Simile, 233
- Simmetrica, 226
- Singolare, 229
- Trasposta, 226
- Trasposta Coniugata, 226
- Triangolare, 225
- Unitaria, 226, 230
- Media, 11
  - Aritmetica, 11
  - Geometrica, 11
  - Ponderata, 11
  - relazioni, 11
- Metodo delle Funzioni Simili, 85
- minimo Limite, 24
- Minore
  - Complementare, 229
  - Estratto, 231
- Molteplicità
  - Algebrica, 233
  - molteplicità, 175
  - Monico, 161
- Norma, 236
  - $\infty$ , 237
  - di Frobenius, 238
  - Euclidea, 237
  - Indotta, 237
  - Matriciale, 237
  - Vettoriale, 237
- Norma del Sup, 90
- Numeri Complessi, 50
  - Argomento, 50
  - Coniugato, 50
  - Esponenziale, 51
  - Inverso, 51
  - Modulo, 50
  - Parte Immaginaria, 50
  - Parte Reale, 50
  - Potenza, 51
- Numero di Nepero, 22
- Olomorfa, 167, 168
- Orbita, 151
- Paraboloide, 214
- Partizione di un Arco di Curva, 101
- Peano, 39
- Piano, 211
- Piano Tangente, 74
- Polinomio Trigonometrico, 184
- Polo, 162, 169
- Potenziale Scalare, 121, 132, 134, 138, 140
- Potenziale Vettoriale, 130, 135, 136, 141, 142
- Problema ai Limiti, 77
- Problema di Cauchy, 77
- Prostaferesi, 16
- Punti Singolari, 79
- Punto di Accumulazione, 54
- Punto Stazionario, 67
- Raggio Spettrale, 233

- Rapporto Incrementale, 30
- Residui Polari, 163
- Residuo, 169
  - Calcolo del, 169
- Retta Tangente, 72
- Riemann-Lebesgue, 185
- Rotore, 123, 126, 128
- Routh, 198
- Ruffini, 203
  
- Sarrus, 229
- Seno Iperbolico, 13
- Serie, 21, 49
  - Armonica, 21
  - Geometrica, 21
- Serie di Fourier, 185
- Serie di Funzioni, 89
- Serie di Potenze, 93
  - Convergenza Uniforme, 95
  - Raggio di Convergenza, 95, 96
- Sfera, 54, 212
- Singularità, 133
- Singularità Eliminabile, 55
- Singularità Essenziale, 169
- Sistema Lineare, 238
- Solidi di Rotazione, 38
- Soluzione Omogenea, 176
- Soluzione Particolare, 176
- Soluzioni Periodiche, 145
- Soluzioni Stazionarie, 148, 151
- Somme Integrali, 101
- Somme Parziali, 89
- Spezzata Orientata, 98
- Stabilità Asintotica, 150, 153
- Studio, 79
  - A-Posteriori, 82
  - A-Priori, 79
- Sturm
  - Successione di, 207
  - Teorema di, 207
- Successione di Funzioni, 88
  
- Tangente Iperbolica, 13
- Taylor, 39
  
- Serie, 39, 40
- Teorema
  - Cayley-Hamilton, 173
  - di Jordan, 236
- Teorema dei Residui, 170
- Teorema della Divergenza, 126, 128
- Teorema di Kamke, 147
- Teorema di Stokes, 126, 129
- Teoremi, 19, 26–28, 33, 44, 55, 56, 59, 63–65, 67, 69, 72, 73, 78, 83
- Abel, 93, 95
- Cauchy, 34
- Confronto, 19
  - Asintotico, 19
- Continuità
  - Esistenza degli Zeri, 29
  - Funzioni Composte, 29
  - Lipschitziana, 28
  - Operazioni, 28
- Convergenza, 19
  - Assoluta, 20
- Criterio, 20
  - del Rapporto, 20
  - della Radice, 20
- del Dini, 72
- Derivata
  - Condizione necessaria, 33
  - delle funzioni composte, 65
  - Lipschitzianità, 34
  - Monotonia, 34
  - Regole di Derivazione, 33
- Funzioni
  - Inverse, 29
- Hine-Cantor, 29
- Integrale
  - Additività, 44
  - funzioni Continue, 44
  - Monotonia, 44
  - Operazioni, 44
  - Teorema Fondamentale, 45
- L'Hôpital, 34
- Lagrange, 33
- Leibniz, 20

- Limite
  - Cambio di Variabile, 26, 57
  - Cauchy, 26
  - Confronto, 57
  - dei Carabinieri, 57
  - Esistenza, 26
  - Funzioni Limitate, 56
  - Monotonia, 26
  - Operazioni, 26, 56
  - Permanenza, 26
  - Restrizioni, 56
  - Sostituzione degli Infinitesimi, 27
  - Sostituzione degli Infiniti, 27
  - Unicità, 26, 56
- Rolle, 33
- Schwartz, 63
- Weierstrass, 29, 59, 91
- Traccia, 227
- Traiettoria, 151
- Versore Tangente, 104
- Vincoli, 71
- Volterra, 78
- Volume di un Solido, 115
- Werner, 16
- Wronskiano, 83
- Zero, 162

## NOTE

[illegible]

## NOTE

[illegible]