# - Integrale di Gauss -

*(Praticò Andrea)*

5 febbraio 2004

# Integrale

Si debba calcolare

$$I = \int e^{-x^2} \cdot x^2 dx$$

Si osserva che, posto $f(x) = \frac{x}{2} e^{-x^2}$, si ha:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2} \left[ e^{-x^2} - 2e^{-x^2} x^2 \right] = \frac{e^{-x^2}}{2} - e^{-x^2} x^2$$

Quindi:

$$\int \left( \frac{e^{-x^2}}{2} - e^{-x^2} x^2 \right) dx = \frac{x}{2} e^{-x^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \int \frac{e^{-x^2}}{2} dx - \frac{x}{2} e^{-x^2}}$$

Purtroppo l'integrale $\int \frac{e^{-x^2}}{2} dx$ è "parente stretto" dell'integrale di Gauss che, come è risaputo, non è calcolabile analiticamente, ma solo numericamente, in un intervallo di integrazione arbitrario; bisogna fare ricorso alla **funzione d'errore** (Error Function), così definita:

$$\boxed{\mathrm{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-t}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}$$

Si pone

$$I_1 = \int_{-t}^{t} \frac{e^{-x^2}}{2} dx$$

e si esegue il seguente cambio di variabile:

$$\begin{cases} x = \frac{z}{\sqrt{2}} \\ x^2 = \frac{z^2}{2} \\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dz \end{cases}$$

L'integrale $I_1$ diviene:

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \Rightarrow$$

$$\boxed{I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \mathrm{erf}(t)}$$

Riepilogando, si ha:

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \mathrm{erf}(t) - \left[\frac{x}{2} e^{-x^2}\right]_{-t}^{t}}$$

**Il summenzionato integrale è perfettamente calcolabile nel caso in cui** $t = +\infty$; infatti

$$\left[\frac{x}{2} e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \qquad \text{ed} \quad \mathrm{erf}(\infty) = 1$$

quindi:

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \simeq 0.8862269254\ldots}$$

La funzione d'errore è spesso utilizzata in ambito della teoria della probabilità e della statistica; se occorre calcolare tale funzione in un intervallo diverso da $]-\infty, +\infty[$ si può utilizzare un calcolatore, o consultare libri di testo in cui i valori assunti da tale funzione sono tabulati.