- Funzione in due variabili -

(Praticò Andrea)

7 settembre 2002

Indice

Capitolo 1

Traccia

Sia data la seguente funzione:

$$f(x, y) = \frac{(e^x - e^{-x} - 2\sin(x)) \cdot \ln(1 + |y|)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

a) Determinare l'insieme di definizione.

b) Stabilire se f è prolungabile per continuità nell'origine.

c) In caso affermativo stabilire se la funzione così prolungata, è differenziabile nell'origine.

Capitolo 2

Soluzione

2.1 Quesito a

Si noti che $f(x,y)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$ tranne che nell'origine; quindi l'insieme di definizione D è uguale a:

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2.2 Quesito b

Per stabilire se f sia prolungabile per continuità, è necessario calcolare il

$$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f(x,y)$$

e verificare che esso ESISTA FINITO.

Secondo la teoria che regola il calcolo dei limiti di funzioni in più variabili, si calcola un CANDIDATO limite della funzione. Si sceglie la restrizione $x = 0$; si ha:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{(1 - 1 - 2\cdot 0)\ln(1 + |y|)}{\sqrt{y^6}} = 0$$

Quindi, secondo il teorema delle restrizioni, il $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f(x,y)$ o è 0 oppure non esiste!

Si effettua il passaggio a coordinate polari, ponendo:

$$x = r\cdot\cos(\theta) \qquad y = r\cdot\sin(\theta)$$

Si ha:

$$\tilde{f}(r,\theta) = \frac{e^{r\cos(\theta)} - e^{-r\cos(\theta)} - 2\sin(r\cos(\theta))}{\sqrt{r^6}} \ln(1 + |r\sin(\theta)|)$$

Secondo il metodo del passaggio a coordinate polari, che afferma che:

sia l il candidato limite della funzione in esame,allora se

$$|\tilde{f}(r,\theta) - l| \leq \varphi(r)$$

dove $\varphi(r)$ è funzione <u>SOLO</u> di r, e se

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = 0$$

allora si ha che

$$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f(x,y) = l$$

SI osserva [1] che

$$|\tilde{f}(r,\theta)| \leq \frac{e^r - e^{-r} - 2\sin(r)}{r^3} \cdot \ln(1+r) = \varphi(r)$$

Calcoliamo il $\lim_{r\to 0^+} \varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \frac{e^r - e^{-r} - 2\sin(r)}{r^2} \cdot \frac{\ln(1+r)}{r}$$

si sa che $\lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(1+r)}{r} = 1$, quindi resta da calcolare il

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{e^r - e^{-r} - 2\sin(r)}{r^2}$$

Essa è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si applica L'Hospital due volte:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{e^r - e^{-r} - 2\sin(r)}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{e^r + e^{-r} - 2\cos(r)}{2r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{e^r - e^{-r} + 2\sin(r)}{2} = 0$$

Resta dimostrato che

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = 0$$

e quindi che il limite della $f(x,y)$ è proprio 0

Osservazione 1 (Dimostrazione della Maggiorazione) *Si dimostrerà che*

$$|\tilde{f}(r,\theta)| \leq \frac{e^r - e^{-r} - 2\sin(r)}{r^3} \cdot \ln(1+r) \tag{2.1}$$

$$\tilde{f}(r,\theta) = \frac{e^{r\cos(\theta)} - e^{-r\cos(\theta)} - 2\sin(r\cos(\theta))}{r^3} \ln(1 + |r\sin(\theta)|)$$

il $\ln(1 + r|\sin(\theta)|)$ *assume valor massimo quando* $|\sin(\theta)|$ *assume valor massimo, cioè* $|\sin(\theta)| = 1$.
Osserviamo il termine: $e^{r\cos(\theta)} - e^{-r\cos(\theta)} - 2\sin(r\cos(\theta))$.
Poniamo $\alpha = r\cdot\cos(\theta)$ *e studiamo il comportamento di:*

$$g(\alpha) = e^{\alpha} - e^{-\alpha} - 2\sin(\alpha)$$

Senza entrare troppo nei dettagli dello studio di tale funzione, si ha che il suo andamento è il seguente:

[1] Verrà dimostrato in seguito

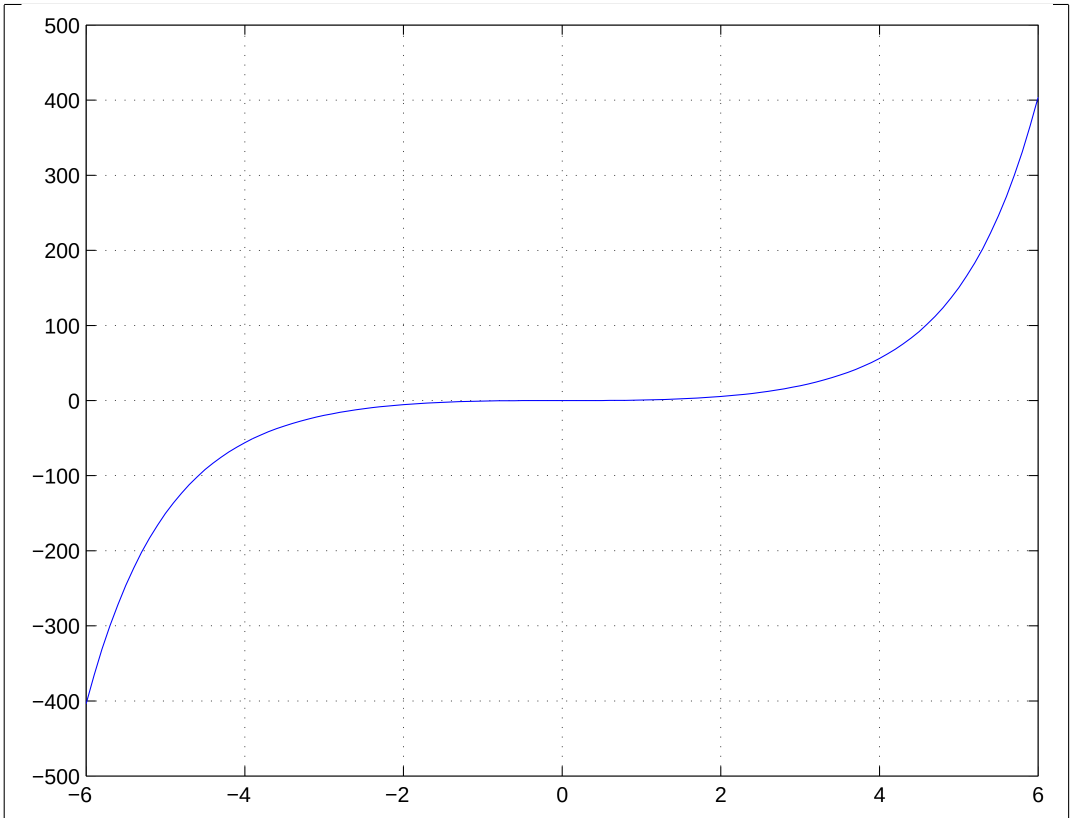

Figura 1 - $g(\alpha)$

Essendo $g(\alpha)$ crescente si ha che

$$e^{r\cos(\theta)} - e^{-r\cos(\theta)} - 2\sin(r\cos(\theta))$$

assume valor massimo (al variare di r) quando $\cos(\theta) = 1$; da cui discende la (2.1).

E' possibile, quindi, estendere per continuità la $f(x, y)$; definiamo la nuova funzione, continua su tutto $\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{per}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.3 Quesito c

La funzione $F(x, y)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$ e per $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$, si hanno le rispettive derivate parziali:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(e^x + e^{-x} - 2\cos(x))(x^2 + y^2) - 3x(e^x - e^{-x} - 2\sin(x))}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \cdot \ln(1 + |y|) \quad (2.2)$$

$$\text{Per } y > 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\frac{x^2+y^2}{1+y} - 3y\ln(1 + y)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \cdot (e^x - e^{-x} - 2\sin(x)) \quad (2.3)$$

$$\text{Per } y < 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-\frac{x^2+y^2}{1-y} - 3y\ln(1 - y)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \cdot (e^x - e^{-x} - 2\sin(x)) \quad (2.4)$$

Secondo la definizione di **Derivata rispetto ad una direzione** si calcola tale derivata (nell'origine) rispetto ad una direzione generica $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *t.c.* $|\vec{v}| = v_1^2 + v_2^2 = 1$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = \lim_{t\to 0} \frac{F(\bar{x}_0 + t\vec{v}) - F(\bar{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t\vec{v})}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{(e^{tv_1} - e^{-tv_1} - 2\sin(tv_1)) \cdot \ln(1+|v_2|t)}{|t|^3}$$
$$\text{dove } \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che attraverso qualche passaggio, si scopre essere nullo per qualsiasi valore di v_1 e v_2.Quindi si ha che

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

A questo punto, è sufficiente dimostrare che:

$$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

dove $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono le derivate parziali (2.2),(2.3),(2.4).

Tale dimostrazione verrà omessa perchè del tutto analoga al calcolo del limite in due variabili effettuato mediante il passaggio a coordinate polari.
Si conclude che, le derivate parziali di $F(x, y)$ esistono e sono continue in $\binom{0}{0}$; quindi, applicando il **Teorema del differenziale Totale**[2] si ha che la $F(x, y)$ **è differenziabile** in $\binom{0}{0}$.

[2]il quale afferma che se F ha derivate parziali e queste sono continue in $\bar{x}_0$, allora F è differenziabile in $\bar{x}_0$