

# 1. Introduzione ai Numeri Reali

## 1.1 Definizione

Denotiamo con  $\mathbb{R} \equiv (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  un insieme, i cui elementi saranno chiamati numeri reali, i quali soddisfano le seguenti proprietà:

1.  $(\mathbb{R}, +)$  è un gruppo abeliano;
2. Indicando con 0 l'elemento neutro dell'operazione  $+$ ,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  è un gruppo abeliano;
3.  $a(b + c) = ab + ac \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ;
4.  $(\mathbb{R}, \leq)$  è totalmente ordinato;
5.  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$ ;
6.  $x \leq y, z > 0 \Rightarrow xz \leq yz$ ;
- 6'.  $x \leq y, z < 0 \Rightarrow xz \geq yz$ ;
7. Assioma di Dedekind o della completezza ordinale.  $A, B \subseteq \mathbb{R}, A \leq B$  allora esiste  $\xi \in \mathbb{R} : A \leq \xi \leq B$ ;

Come è ben noto le proprietà precedenti - esclusa la 7 - sono vere anche nel campo razionale. La differenza tra  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  sarà quindi nella proprietà 7 e nelle sue conseguenze. È noto che

**Teorema 1.1** *L'equazione  $x^2 = 2$  non ha soluzione in  $\mathbb{Q}$ .*

Il precedente teorema è equivalente al fatto che  $\mathbb{Q}$  non verifica la proprietà di completezza ordinale. Infatti, consideriamo le due classi (separate),

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 > 2\}.$$

È immediato riconoscere che  $A, B \neq \emptyset, A \leq B, A \cup B = \mathbb{Q}$ . Tuttavia, la coppia  $A, B$  non ammette elemento separatore in  $\mathbb{Q}$ . Infatti, supponiamo  $\xi \in \mathbb{Q}$  elemento separatore e proviamo che  $\xi \notin A \cup B$ . Se  $\xi \in A$  deve aversi  $\xi > 0$ . Allora,

$$\left(\xi + \frac{1}{n}\right)^2 = \xi^2 + \frac{2\xi}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \xi^2 + \frac{2\xi + 1}{n}.$$

Usando il postulato di Archimede si vede che è possibile scegliere  $n \in \mathbb{N}$  in modo che  $\left(\xi + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$  quindi  $\xi$  non può appartenere all'insieme  $A$ . In maniera simile si prova che  $\xi \notin B$  da cui l'assurdo.

## 1.2 Estremi di un insieme numerico

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto. Un numero  $k$  si dice un maggiorante per  $X$  se  $x \leq k \forall x \in X$ . Un numero  $h$  si dice un minorante per  $X$  se  $x \geq h \forall x \in X$ . Un maggiorante che appartiene all'insieme  $X$  si dice massimo mentre un minorante che appartiene all'insieme  $X$  si dice minimo.

**Teorema 2.1** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $X \neq \emptyset$ . Se  $X$  ammette massimo (minimo) questo è unico.

*Dim.* Segue immediatamente dalla definizione. □

Un insieme  $X \subset \mathbb{R}$  si dice limitato superiormente se ammette maggioranti mentre si dice limitato inferiormente se ammette minoranti. Indichiamo con  $X^*$ ,  $X_*$  rispettivamente l'insieme dei maggioranti e dei minoranti di  $X$ . Se  $X$  è limitato sia superiormente che inferiormente si dirà limitato. Poniamo  $\sup X = \min X^*$  se il minimo esiste e poniamo  $\inf X = \max X_*$  se il massimo esiste.

In generale in  $\mathbb{Q}$  un insieme limitato può anche non avere estremi. In  $\mathbb{R}$  invece ogni insieme limitato ammette estremi. Ciò è equivalente all'assioma di Dedekind.

**Teorema 2.2** Sono equivalenti in  $\mathbb{R}$

1. Assioma di Dedekind;
2. Ogni insieme non vuoto limitato superiormente ammette estremo superiore in  $\mathbb{R}$ ;
3. Ogni insieme non vuoto limitato inferiormente ammette estremo inferiore in  $\mathbb{R}$ .

*Dim.* Proviamo che 1. implica 2. Data la coppia  $(X, X^*)$  si ha che  $X \leq X^*$  e quindi esiste  $\xi \in \mathbb{R}$  elemento separatore. Dal fatto che  $X \leq \xi$  si ha che  $\xi \in X^*$  mentre  $\xi \leq X^*$  dice che  $\xi = \min X^*$ . Viceversa, siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  due classi separate e non vuote. Il fatto che  $A \leq B$  implica che  $B \leq A^*$  e quindi  $A^* \neq \emptyset$ . Allora  $\exists \sup A = \min A^*$ . Poiché  $\xi \in A^*$ , segue  $\xi \geq A$  e siccome  $\xi$  è il più piccolo dei maggioranti,  $\xi \leq B$  da cui  $A \leq \xi B$  come si voleva. In modo simile si prova che 1. equivale a 3. □

Nel seguito adotteremo la seguente convenzione: Se  $X$  è un insieme non limitato superiormente porremo  $\sup X = +\infty$  mentre se  $X$  è un insieme non limitato inferiormente porremo  $\inf X = -\infty$ .

**Teorema 2.3** Sia  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $X, X^* \neq \emptyset$ . Allora un numero  $L$  è estremo superiore di  $X$  se e solo se:

1.  $L \geq x \forall x \in X$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : L - \varepsilon < x_\varepsilon$ .

*Dim.* Se  $L$  è estremo superiore è elemento di  $X^*$  perché minimo di  $X^*$  e quindi è un maggiorante ovvero la 1. Siccome  $L$  è il minimo dei maggioranti,  $L - \varepsilon$  non può essere maggiorante e quindi la 2.

Viceversa, se valgono 1. e 2. abbiamo che la 1. implica che  $L \in X^*$  mentre la 2. dice che  $L - \varepsilon \notin X^*$  e quindi  $L = \min X^*$ .  $\square$

In modo simile si dimostra il seguente

**Teorema 2.4** Sia  $X \subset \mathbb{R}, X, X_* \neq \emptyset$ . Allora un numero  $l$  è estremo inferiore di  $X$  se e solo se:

1.  $L \leq x \forall x \in X$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : l + \varepsilon > x_\varepsilon$ .

**Definizione 2.1** Date due classi numeriche  $A, B$  separate e non vuote diciamo che sono contigue se l'elemento separatore è unico.

**Osservazione 2.1** Se due classi  $A, B$  sono separate e contigue si ha:  $\xi = \sup A = \inf B$ .

**Teorema 2.5** Due classi separate  $A, B$  sono contigue se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A, b_\varepsilon \in B : b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon.$$

*Dim.* Usando l'osservazione precedente e le caratterizzazioni date dai teoremi precedenti, possiamo dire che

$$\exists a_\varepsilon \in A, b_\varepsilon \in B : \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a_\varepsilon, \quad \xi + \frac{\varepsilon}{2} > b_\varepsilon,$$

da cui

$$b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon.$$

Viceversa,

$$0 \leq \inf B - \sup A \leq b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

e quindi  $\sup A = \inf B$ .  $\square$

**Teorema 2.6** Dati  $x > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  esiste un unico numero  $\xi > 0 : \xi^n = x$ .

Il numero  $\xi$  la cui esistenza è assicurata dal teorema si chiama radice  $n$ -esima aritmetica di  $x$  e si indica con il simbolo  $\sqrt[n]{x}$ .

**Esempio 2.1** Come applicazione del teorema precedente studiamo l'equazione  $x^n = a$ . Nel caso in cui  $n$  è dispari,  $x$  ed  $a$  hanno lo stesso segno. Allora  $x$  è positivo e l'unica soluzione è quella data dal teorema. Se  $n$  è pari, l'equazione ammette anche una soluzione negativa  $-\sqrt[n]{a}$  e quindi se  $a > 0$  e  $n$  pari, l'equazione ammette due soluzioni di segno opposto  $\pm \sqrt[n]{a}$ . Supponiamo adesso  $a < 0$ . In tal caso - affinché l'equazione ammetta soluzioni -  $n$  deve essere dispari ed inoltre  $x < 0$ . Abbiamo:  $x^n = a$  ovvero  $(-x)^n = -a$  da cui  $-x = \sqrt[n]{-a}$  e quindi  $x = -\sqrt[n]{-a}$ . Se anche in questo

caso conveniamo di indicare con  $\sqrt[n]{a}$  l'unica soluzione dell'equazione allora  $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ .

**Teorema 2.7** *L'assioma di Dedekind implica la proprietà di Archimede.*

**Teorema 2.8** *Sia  $x \in \mathbb{R}$ . L'insieme  $\{q \in \mathbb{Z} : q \leq x\}$  ammette massimo e, tale numero si denota con  $[x]$ .*

Da ciò si ha:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Definizione 2.2** *Potenza ad esponente razionale. Sia  $q = \frac{m}{n}$ ,  $a > 0$ . Poniamo*

$$a^q \equiv a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Si ha:

**Teorema 2.9**

1.  $a^q \cdot a^s = a^{q+s}, \quad \forall q, s \in \mathbb{Q};$
2.  $(a^q)^s = a^{qs}, \quad \forall q, s \in \mathbb{Q};$
3.  $a^q b^q = (ab)^q, \quad \forall a, b > 0, q \in \mathbb{Q}.$

**Teorema 2.10** *Sia  $a > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Allora le classi*

$$A = \{a^p : p \in \mathbb{Q}, p < x\}, \quad B = \{a^p : p \in \mathbb{Q}, p > x\}$$

*sono separate e contigue.*

**Definizione 2.3** *Potenza ad esponente reale - Dato  $a > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  poniamo*

$$a^x \equiv \sup\{a^p : p \in \mathbb{Q}, p < x\} = \inf\{a^p : p \in \mathbb{Q}, p > x\}.$$

*Nel caso in cui  $0 < a < 1$  poniamo  $a^x \equiv \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .*

Si ha:

**Teorema 2.11**

1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
2.  $(a^x)^y = a^{xy}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$
3.  $a^x b^x = (ab)^x, \quad \forall a, b > 0, x \in \mathbb{R}.$

Dalla definizione di potenza segue immediatamente

**Teorema 2.12**  $a > 1, p > 0 \Rightarrow a^p > 1$ .

**Corollario 2.1** Si ha:

$$a > 1, x' < x'' \Rightarrow a^{x'} < a^{x''}$$

mentre

$$0 < a < 1, x' < x'' \Rightarrow a^{x'} > a^{x''}$$

**Teorema 2.13** Dati  $a > 0, a \neq 1, b > 0$  l'equazione  $a^x = b$  ammette una ed una sola soluzione  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.4** La soluzione dell'equazione  $a^x = b$  si dice logaritmo di  $b$  in base  $a$  e si denota con  $\log_a b$ .

Il successivo teorema raccoglie le proprietà principali del logaritmo.

**Teorema 2.14**

1.  $a^{\log_a b} = b; \quad \forall a > 0, a \neq 1, b > 0$
2.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \forall a > 0, a \neq 1, x, y > 0$
3.  $\log_a x^p = p \log_a x; \quad \forall a > 0, a \neq 1, x > 0, p \in \mathbb{R};$
4.  $\log_a x = \frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha a}, \quad \forall a, \alpha > 0, a, \alpha \neq 1, x > 0.$

**Definizione 2.5** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $S \subseteq I$ . L'insieme  $S$  si dice denso in  $I$  se

$$\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow \exists s \in S : a < s < b.$$

Vogliamo provare che  $\mathbb{Q}$  ed  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sono densi in  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 2.1** Siano  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$  e sia  $0 < \delta < y - x$ . Allora esiste  $n \in \mathbb{Z}$  tale che  $x < n\delta < y$ .

*Dim.* Sia  $m \in \mathbb{Z}$  tale che  $m\delta \leq x < (m+1)\delta$ . Posto  $n = m+1$  si ha:  $x < n\delta$ . Inoltre

$$n\delta = (m+1)\delta = m\delta + \delta \leq x + \delta = x + y - x = y.$$

□

**Teorema 2.15** L'insieme  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .

*Dim.* Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  Per il principio di Archimede esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $0 < \frac{1}{n} < b - a$ . Applicando il Lemma esiste  $m \in \mathbb{Z}$  tale che  $a < m \cdot \frac{1}{n} < b$  e quindi  $a < \frac{m}{n} < b$ . □

**Teorema 2.16** *L'insieme  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ .*

*Dim.* Sia  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Supponiamo  $\theta > 0$  e sia  $n$  tale che  $\frac{\theta}{n} < b - a$ . Per il Lemma esiste  $m \in \mathbb{Z}$  tale che  $a < \theta \frac{m}{n} < b$  e quindi la tesi con  $\theta \frac{m}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  per  $m \neq 0$ . Infatti, se fosse  $\theta \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  allora si avrebbe  $\theta \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \theta \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

### 1.3 Cenni di calcolo combinatorio

Nel seguito sarà utile adottare le seguenti convenzioni:

**Definizione 3.1** *Posto  $0! = 1$  e  $k! = (k-1)!k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  definiamo*

$$\begin{cases} \binom{n}{0} \equiv 1, & n \in \mathbb{N}_0 \\ \binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

I numeri  $\binom{n}{k}$  si dicono coefficienti binomiali. È utile osservare che

**Teorema 3.1**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

*Dim.* Immediata dalla definizione.  $\square$

Inoltre si ha:

**Teorema 3.2** *(Formula del binomio di Newton)*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

**Osservazione 3.1** I coefficienti binomiali presenti nella formula del binomio si possono calcolare anche secondo lo schema seguente. Diciamo  $a_{n,k} = \binom{n}{k}$ . Allora si ha:

$$\begin{cases} a_{1,1} = 1 \\ a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1}, & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$