- Integrali Indefiniti -

(Praticò Andrea)

27 agosto 2003

Indice

Capitolo 1

Primo Integrale

Si voglia calcolare:

$$\int \left[1 - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right] dx$$

è sufficiente calcolare

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

Bisogna, per prima cosa, effettuare la determinazione del dominio della funzione integranda; si osserva che essa è definita per

$$x \in \{] - \infty; -1] \cup [+1; +\infty[\}$$

Si effettua la sostituzione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Si deve prestare attenzione al fatto che:

$$\begin{cases} x = +\sqrt{y^2+1} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy \quad (\text{per } x \geq 1) \\ \\ x = -\sqrt{y^2+1} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy \quad (\text{per } x \leq -1) \end{cases}$$

Si effettua la sostituzione suddetta, distinguendo i due casi:

$x \geq 1$

$$I = \int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy = \int \frac{y^2}{y^2+1} dy = \int \left(1 - \frac{1}{y^2+1} \right) dy =$$
$$= y - \arctan(y)$$

quindi

$$I = \sqrt{x^2-1} - \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

$x \leq -1$

$$I = \int \frac{y}{-\sqrt{y^2+1}} \cdot \frac{-y}{\sqrt{y^2+1}} dy = \int \frac{y^2}{y^2+1} dy = \int \left(1 - \frac{1}{y^2+1}\right) dy =$$

$$= y - \arctan(y)$$

Quindi in ogni caso

$$I = \sqrt{x^2-1} - \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

Allora:

$$\boxed{\int \left[1 - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right] dx = x + \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1} + K}$$

con K =costante arbitraria.

Capitolo 2

Secondo Integrale

Si voglia calcolare:

$$\int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right] dx$$

L'integrale $\int \left[\frac{1}{x}\right] dx = \ln(|x|)$, quindi ci concentreremo solo su

$$I = \int \left[\frac{1}{\sin(x)}\right] dx$$

La migliore sostituzione da operare è:

$$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Visto che **non ci fidiamo** della suddetta espressione, ne verifichiamo la correttezza direttamente con l'espressione che a noi interessa:

$$\sin(x) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin(x)} \quad \text{C.V.D.}$$

Quindi, senza perdere il filo:

$$I = \int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

Si effettua l'ulteriore sostituzione

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2\arctan(y) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+y^2} dy$$

Sostituendo, si ha:

$$I = \int \frac{1+y^2}{2y} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy = \ln(|y|)$$

allora

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)$$

Per finire:

$$\boxed{\int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right] dx = \ln(|x|) - \ln(|\tan\left(\frac{x}{2}\right)|) = \ln\left|\frac{x}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + K}$$

con K =costante arbitraria.