

Integrale Impropero

(Praticò Andrea)

23 giugno 2003

Dire se esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right) dx$$

Data la continuità della funzione integranda, e per l'additività dell'integrale, si può scrivere:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right) dx + \int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right) dx$$

Sicuramente l'integrale

$$\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right) dx$$

esiste finito in quanto la funzione integranda è continua, inoltre l'intervallo di integrazione è chiuso e limitato.

E' sufficiente dimostrare l'esistenza del secondo integrale ($1 \rightarrow +\infty$).

Si sa che¹

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = 1$$

quindi se si dimostrasse che

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \leq \frac{1}{x^2}$$

allora l'integrale cercato esiste finito!

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \arctan(x^2) \geq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1 + x^2 \cdot \arctan(x^2)}{x^2} \geq \frac{\pi}{2} \quad \text{poniamo } y = x^2$$

$$g(y) = \frac{1 + y \cdot \arctan(y)}{y}$$

¹altrimenti è molto semplice calcolarlo

Per $y = 1$ $g(1) = 1 + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2}$.

$$g'(y) = -\frac{1}{y^2(1+y^2)} < 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

La funzione $g(y)$ è decrescente. Calcoliamo

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) + \frac{y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{L'Hospital})$$

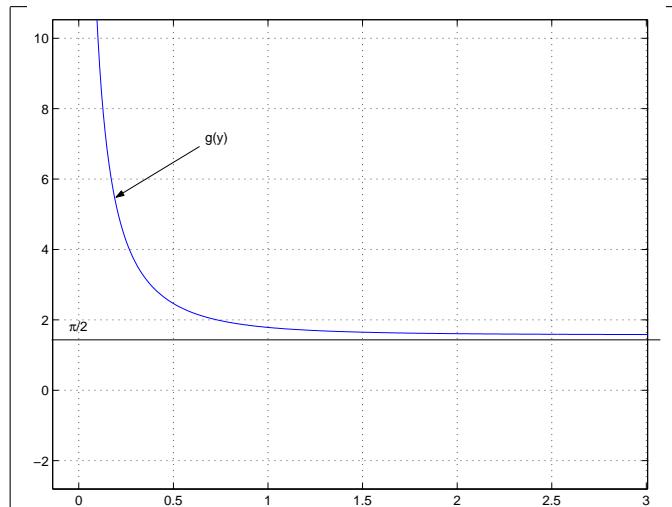


Figura 1 - Andamento di $g(y)$

Le stesse considerazioni valgono per:

$$f(x) = \frac{1+x^2 \cdot \arctan(x^2)}{x^2}$$

Resta dimostrato che

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \leq \frac{1}{x^2}$$

Allora per il teorema della **Monotonia dell'Integrale**:

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) \right) dx \leq \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = 1$$