Successione definita per ricorrenza

(Praticò Andrea)

23 giugno 2003

Sia data la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \sin(a_n) \end{cases}$$

Si voglia calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Dimostriamo che $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; per fare ciò utilizzeremo il metodo induttivo:

$$a_0 = 1 > 0 \quad \text{Vera}$$

Supponiamo che sia vera per $n = k$, ovvero

$$a_k > 0$$

dobbiamo dimostrare che

$$a_{k+1} > 0$$

$$a_{k+1} = a_k - \sin(a_k)$$

essendo $a_k > 0$ dividiamo entrambi i membri per a_k:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\sin(a_k)}{a_k}$$

la successione $\frac{\sin(a_k)}{a_k}$ ha il seguente andamento:

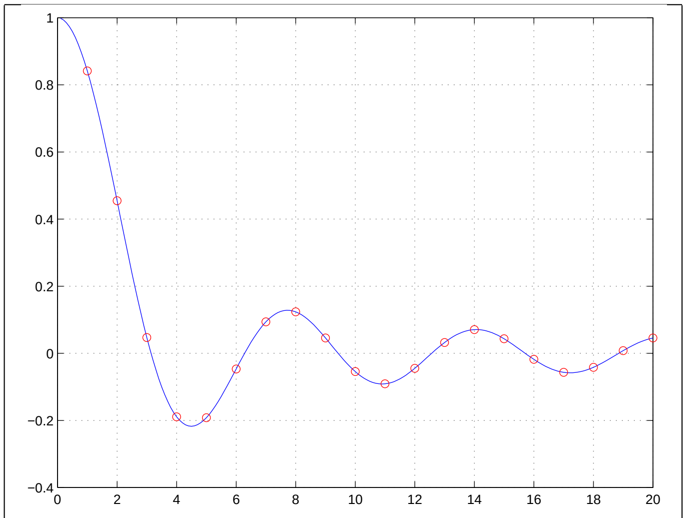

Figura 1 - Andamento di $\frac{sin(x)}{x}$

Si nota che

$$\frac{\sin(a_k)}{a_k} < 1 \Rightarrow -\frac{\sin(a_k)}{a_k} > -1 \Rightarrow 1 - \frac{\sin(a_k)}{a_k} > 0$$

quindi si è dimostrato che

$$a_{k+1} = 1 - \frac{\sin(a_k)}{a_k} > 0$$

Allora per il metodo di induzione si può dire che

$$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

In maniera analoga dimostriamo che $a_n \leq 2$.

$$a_0 = 1 \leq 2 \quad \text{vera}$$

Supponiamo che sia vera per $n = k$ e dimostriamola per $n = k + 1$:

$$\text{Ipotesi:} \quad 0 < a_k \leq 2$$

$$a_{k+1} = a_k - \sin(a_k) \Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\sin(a_k)}{a_k}$$

Essendo $0 < a_k < 2$ si può osservare dall'andamento di seguito riportato che

$$0 < \frac{\sin(a_k)}{a_k} \leq 1$$

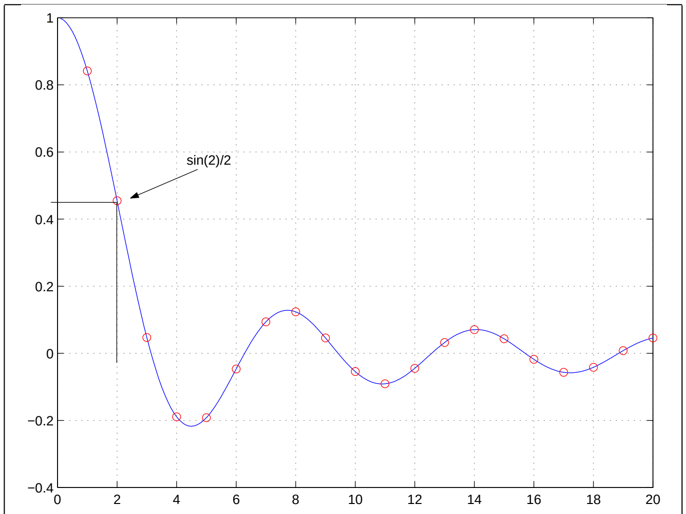

Figura 2 - Andamento di $\frac{sin(x)}{x}$

e quindi

$$1 - \frac{\sin(a_k)}{a_k} \leq 1$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 1 \Rightarrow a_{k+1} \leq a_k \leq 2$$

Allora

$$a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostriamo adesso che a_n è una successione decrescente; ovvero dovremo dimostrare che:

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

$$a_{n+1} - a_n = -\sin(a_n)$$

ma avendo dimostrato che $0 < a_n \leq 2 \Rightarrow \sin(a_n) \geq 0 \Rightarrow -\sin(a_n) < 0$, la tesi è immediata.
La successione a_n risulta allora decrescente e limitata (sia superiormente che inferiormente); quindi si può dire che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

in quanto 0 è il limite inferiore di a_n