- Calcolo Limite -

(Praticò Andrea)

21 settembre 2002

Capitolo 1

Traccia

Si voglia calcolare il seguente limite senza far ricorso allo sviluppo in serie di Taylor, né alla regola di L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x}$$

Capitolo 2

Svolgimento

$$\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$$

si somma e si sottrae 1 al numeratore di quest'ultima,si mette in evidenza una x e si moltiplica num e denom per x:

$$\frac{x\cos(x) - 1 + 1 - \sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{\cos(x) - 1 + 1 - \frac{\sin(x)}{x}}{x} \cdot \frac{x}{\sin(x)} =$$

$$= \left[\frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}\right]\frac{x}{\sin(x)} = \left[\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \cdot x + \frac{1}{x}\left(\frac{x - \sin(x)}{x}\right)\right]\frac{x}{\sin(x)}$$

Riepilogando:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \cdot x + \frac{x - \sin(x)}{x^2}\right]\frac{x}{\sin(x)} \tag{2.1}$$

Si ossevi che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \cdot x = 0$$

infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

Quindi bisogna calcolare il solo limite per $x \to 0$ di $\frac{x-\sin(x)}{x^2}$.
Si dimostrerà che tale limite è 0 [1]

Poniamo

$$x > 0 \qquad x << 1$$

Si ha che

$$x > \sin(x) \Rightarrow x - \sin(x) > 0$$

Verifichiamo che:

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} > x - \sin(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 1 \Rightarrow x^2 < 1 \quad \text{Che è Vera perchè } x << 1$$

Verifichiamo che:

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} < x \Rightarrow x - \sin(x) < x^3$$

[1]Si osservi con L'Hopital che $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2} = 0$

Bisogna dimostrare che $x^3 - x + \sin(x) > 0$, ma sappiamo che $x > \sin(x)$ quindi:

$$x^3 - x + \sin(x) > \sin^3(x) - \sin(x) + \sin(x) = \sin^3(x) > 0$$

Quindi s'è dimostrato che:

$$x - \sin(x) < \frac{x - \sin(x)}{x^2} < x$$

Allora per il teorema dei due Carabinieri, si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$$

Poniamo

$$x < 0 \qquad x >> -1$$

Si dimostra che[2] $x - \sin(x) < 0 \Rightarrow x < \sin(x)$ e quindi

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} < 0$$

Dimostriamo che $\frac{x-\sin(x)}{x^2} > x$:

$$\frac{x - \sin(x)}{x^2} > x \Rightarrow x - \sin(x) > x^3 \Rightarrow x^3 - x + \sin(x) < 0$$

Essendo questa volta $x < \sin(x)$, si ha:

$$x^3 - x + \sin(x) < \sin^3(x) - \sin(x) + \sin(x) = \sin^3(x) < 0$$

Risulta, quindi, dimostrato che:

$$x < \frac{x - \sin(x)}{x^2} < 0$$

Sfruttando ancora il teorema dei due Carabinieri, si ha che:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$$

ma allora resta dimostrato che:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$$

Osservando nuovamente la (2.1) si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x} = [0 + 0] \cdot 1 = 0$$

Osservazione 1 *Non è molto conveniente calcolare questo limite, sfruttando solo i teoremi sui limiti ed i limiti notevoli, infatti mediante lo sviluppo in serie di Taylor, del prim'ordine, della funzione* $\tan(x)$ *in un intorno dell'origine, si ha:*

$$\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

ed il limite è calcolato istantaneamente!!

[2] Basta porre $y = -x$ e sostituire